Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
15.04.2010

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

9. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 23 – Matrizen linearer Abbildungen:

1) Gibt es eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad f(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}, \quad f(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \ ?$$

2) Betrachten wir in $\mathbb{R}^3$ den Vektor $v = \begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix}$ und die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto v \times x.$$

Bestimmen Sie bezüglich einer geeigneten Basis $\mathcal{B}$, sodass die Abbildungsmatrix $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ möglichst einfach ist. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix bezüglich der Standardasis.

Aufgabe 24 – Ajungierte Matrizen:

Sei $A := (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die zu A adjungierte Matrix A^* ist gegeben durch:

$$A^* = \overline{A}^t = (\overline{a}_{ji})$$

Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und r eine komplexe Zahl, zeigen Sie:

1) $(A+B)^* = A^* + B^*$
2) $(rA)^* = \overline{r}A^*$ und $(AB)^* = B^*A^*$
3) $(A^*)^* = A$
4) Falls A invertierbar ist, $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

Aufgabe 25 – Das Gaußsche Elinimationsverfahren:

Ist $A \in M^{n\times m}$ und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gegeben, so betrachten wir die durch folgende Umformungen aus A entstandenen Matrizen:

1) Multiplikation der i-ten Zeile mit λ,
2) Addition der j-ten Zeile zur i-ten Zeile,
3) Addition der λ-fachen j-ten Zeile zur i-ten Zeile,
4) Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile.

Zeigen Sie, dass jede Umformung eine lineare Abbildung darstellt.

Hausaufgabe 15 – Basistransformation:

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Basen

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \text{ und } \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben.

1) Berechnen Sie die Transformationsmatrix $[\,\mathrm{Id}\,]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

2) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$v = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - 8 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Hausaufgabe 16 – Matrizen:

Seien die Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ und $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$\varphi : \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_2 + \xi_3 \\ \xi_3 \\ \xi_1 + \xi_3 + \xi_4 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \psi : \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_3 \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Matrizen $[\varphi]$ bzw. $[\psi]$ der Abbildungen bezüglich der Standardbasis und den Rang der Matrizen.