Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
08.07.2010

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

15. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 41 – Normale Abbildungen:

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Für $T : V \to V$ sind äquivalent:

a) T ist selbstadjungiert

b) T ist normal und $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$

c) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}\ \forall x$.

Beweisen Sie die Äquivalenzen.

Aufgabe 42 – Orthogonale Abbildungen:

Betrachten Sie $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ sei $F_\alpha \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Abbildung $z \mapsto \alpha z$.

1) Zeigen Sie: F_α ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

2) Zeigen Sie, dass $\langle w, z\rangle = \mathrm{Re}(w\overline{z})$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}$ definiert.

3) Bestimmen Sie alle α, für die F_α eine orthogonale Abbildung ist. Erklären Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

4) Wie sieht die darstellende Matrix $[F_\alpha]_{(1,i)}^{(1,i)}$ aus?

Aufgabe 43 – Hilberträume:

Sei $l^2 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} | \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty\}$ die Menge aller quadratisch summierbaren Folgen. Wir schreiben im folgenden $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, \dots)$.

a) Zeigen Sie: l^2 wird mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation zu einem komplexen Vektorraum.

b) Zeigen Sie: durch

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} \qquad \text{wird eine Abbildung } l^2 \times l^2 \to \mathbb{C}$$

definiert, die l^2 zu einem unitären Raum macht.

c) Geben Sie eine Abbildung $\varphi : l_2 \to l_2$ an, die $\langle \cdot, \cdot\rangle$ erhält, aber nicht bijektiv ist.

d) Sei U die Teilmenge von l_2, deren Elemente nur endlich viele von Null verschiedene Einträge haben, d.h.

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2 | \exists N_0 : x_i = 0\,\forall i > N_0\}.$$

Zeigen Sie, dass U ein linearer Teilraum von V ist, für den $(U^\perp)^\perp \neq U$ gilt.