Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
24.06.2010

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 38 – Minitest: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

i) Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten von A sind

   a) orthogonal zueinander;

   b) linear unabhängig;

   c) eine Basis des Bildes der zugehörigen Abbildung.

ii) A ist genau dann diagonalisierbar, wenn

   a) A n verschiedene Eigenwerte hat;

   b) A nur einen Eigenwert λ hat und dessen geometrische Vielfachheit n ist;

   c) es in $\mathbb{R}^n$ eine Basis von Eigenvektoren von A gibt.

Aufgabe 39 – Jordansche Normalform:

1. Welche der folgenden Matrizen sind ein Jordanblock?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Welche der folgenden Matrizen sind in Jordannormalform?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 40 – Jordansche Normalform:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -8 & -4 \\ 2 & 1 & -8 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A sowie deren geometrischen und algebraischen Vielfachheit.

ii) Ist A diagonalisierbar?

iii) Sei $a_s := \dim \ker(A - \lambda_i I)^s$. Die Formel $2a_s - a_{s-1} - a_{s+1}$ gibt die Anzahl des Jordanblocks $J^s_{\lambda_i}$ an. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A.

Hausaufgabe 25 – Eigenwertproblem:

Sei V ein $K-$Vektorraum und $F : V \to V$ linear. Zeigen Sie: Hat $F^2 + F$ den Eigenwert -1, so hat F^3 den Eigenwert 1. Ist ein Eigenvektor von $F^2 + F$ zum Eigenwert -1 auch Eigenvektor von F^3 zum Eigenwert 1?

Hausaufgabe 26 – Gedämpfte Schwingung:

Ist eine Masse an einer Feder aufgehängt und zur Zeit $t = 0$ in senkrechter Richtung in die Position $y(0) = \alpha$ mit der Geschwindigkeit $\dot{y}(0) = \beta$ ausgelenkt, so ist die weitere Bewegung bestimmt durch die Differentialgleichung der *gedämpften Schwingung*

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega^2 y = 0, \qquad y(0) = \alpha,\ \dot{y}(0) = \beta.$$

Dabei sind $\omega, \mu \in \mathbb{R}^+$ Konstanten, ω ist durch die Feder und μ durch die Reibung bestimmt. Man macht daraus mit $y_0 = y$ und $y_1 = \dot{y}$ das lineare System erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{y_0} &= y_1, & y_0(0) &= \alpha, \\ \dot{y_1} &= -\omega^2 y_0 - 2\mu y_1, & y_1(0) &= \beta. \end{aligned}$$

1) Wie sieht die zugehörige Matrix A aus?

2) Eine Diagonalisierung von A entspricht eine Entkopplung des obigen Systems. Betrachten Sie nur den Fall $\mu^2 \geq \omega^2$ und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

3) Bestimmen Sie im Falle einer Diagonalisierbarkeit eine Basis aus Eigenvektoren von A.

4) Geben Sie ferner eine Basis des Lösungsraumes von $\dot{y} = Ay$ an. Wie sieht die Lösung des obigen Systems aus?

Hinweise:
Um Lösungen zu erhalten, kann man den Ansatz

$$y(t) = e^{\lambda t} \cdot v$$

benutzen, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dabei gilt folgendes:

1. $y(t) = e^{\lambda t} \cdot v$ ist eine Lösung $\neq 0$ von $\dot{y} = Ay$ genau dann, wenn v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.
   Beweisen Sie diese Aussage.

2. Lösungen $y^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot v_1, \ldots, y^{(k)}(t) = e^{\lambda_k t} \cdot v_k$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind.

3. Mit $\dot{y} = \frac{d}{dt} y$ bzw. $\ddot{y} = \frac{d^2}{dt^2} y$ wird die erste bzw. zweite Ableitung der Lösung y nach der Zeit bezeichnet.

Insbesondere erhält man mit diesem Ansatz eine Basis des Lösungsraumes, falls A diagonalisierbar ist.