Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
10.06.2010

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

13. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 35 – Minitest:

In dieser Aufgabe sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Ist λ ein Eigenwert von A zu Eigenvektor v, so ist $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von A^{-1} zum Eigenvektor v.

2) Es gibt keine lineare Abbildung, die den Eigenwert $\lambda = 0$ hat.

3) Es gibt eine lineare Abbildung, die 0 als Eigenvektor hat.

4) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Ist $\mathrm{Kern}(f) \neq \{0\}$, so hat f den Eigenwert $\lambda = 0$.

5) Besitzen zwei Polynome eine gemeinsame Nullstelle, so sind sie linare Abhängig.

6) A kann nicht mehr als n verschiedene Eigenwerte haben.

Aufgabe 36 – LU-Zerlegung:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben

a) Lösen Sie die Gleichung $A \cdot x = b$ durch LU-Zerlegung.

b) Lösen Sie die Gleichung $A \cdot x = b$ durch Cramersche Regel.

Aufgabe 37 – Eigenwerte und Eigenfunktionen:

a) Sei V der zweidimensionale Vektorraum über $\mathbb{C}$, der von den beiden Funktionen $f_1(x) := e^x \cos(x)$ und $f_2(x) := e^x \sin(x)$ aufgespannt wird. Zeigen Sie, dass die Ableitung D eine lineare Abbildung von V nach V ist. Stellen Sie die Matrix von D bezüglich der Basis (f_1, f_2) auf und berechnen Sie die Eigenwerte von D. Geben Sie die Eigenvektoren (Eigenfunktionen) von D an!

b) Betrachten Sie den linearen Raum $U := \mathrm{Lin}\{f_n(x) = e^{inx} :\ n \in \mathbb{Z}\}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Ableitung D eine lineare Abbildung von U nach U ist. Stellen Sie die Matrix von D bezüglich der Basis $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ auf und berechnen Sie die Eigenwerte von D. Geben Sie die Eigenvektoren von D an! Warum ist "klar", dass $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Basis, d.h. hier, die f_n linear unabhängig sind?

c) Sei $C^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller komplexwertigen unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, und sei $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ der Ableitungsoperator. Berechnen Sie das Spektrum $\sigma(D)$ (d.h. die Menge aller Eigenwerte von D).

Hausaufgabe 23 – Eigenwerte:

Sei V ein Vektorraum mit Orthonormalbasis v, w. Seien

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

a) Zeigen Sie, die folgenden Vektoren eine Orthonormalbasis von V bilden

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + w), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v - w)$$

b) Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, die bzgl. der Basis v, w die Matrix A hat. Zeigen Sie, dass u_1, u_2 aus a) Eigenvektoren von f zu den Eigenwerten $a + b$ bzw. $a - b$ sind.

Hausaufgabe 24 – Eigenwerte:

Wir betrachten $\mathbb{C}^2$ ausgestatted mit dem kanonischen Skalarprodukt. Gegeben seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$ bilden.

b) Zeigen Sie, dass v_1, v_2 Eigenvektoren von A sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.