Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
27.05.2010

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

12. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 32 – Minitest:

In dieser Aufgabe sei $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Falls $\det A = \det B$ gilt, so ist $A = B$.
2) Jede reelle Matrix hat eine Determinante.
3) Ist $\det A = 0$, so gilt $A = 0$.
4) Falls $\det A \neq 0$ ist, so besitzt das Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ nur die Lösung $x = 0$.
5) Sei A invertierbar. Dann ist $\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$.

Aufgabe 33 – Determinante:

Sei $\varphi \in [0, \pi]$ gegeben und $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie $\det(A - \lambda I)$.
b) Lösen Sie die Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$ in $\mathbb{C}$.
c) Für welche φ sind die Lösungen aus b) reellwertig? Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

Aufgabe 34 – Van der Monde Matrix:

Sei $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ und wir betrachten die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

1) Berechnen Sie $\det A$ für $n = 2$ und $n = 3$.
2) Stellen Sie eine Vermutung über $\det A$ für ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$ auf.
3) Beweisen Sie Ihre Vermutung (z.B. anhand vollständiger Induktion mit Gauss-Jordan-Algorithmus).

Hausaufgabe 21 – Determinante:

Sei $A, B \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\det A$ und $\det B$.

Hausaufgabe 22 – Permutationsmatrix:

Bestimmen Sie die zugehrigen Permutationsmatrizen folgender Permutationen:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$