



11. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 29 – Matrizen, Basen, Gleichungssysteme:

Gegeben sei $B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

- Zeigen Sie: B ist eine Basis des \mathbb{R}^4 .
- Schreiben Sie den Vektor $b := (4, 6, 6, 4)^t$ als Koordinatenvektor bzgl. B .
- Gegeben sei ein Vektor $c := (1, 2, 3, 4)_B^t$ bzgl. der Basis B . Stellen Sie den Vektor c bzgl. der Standardbasis dar. Geben Sie die Transformationsmatrix von B nach der Standardbasis an.
- Gibt es eine Basis, bezüglich deren der Vektor $b := (4, 6, 6, 4)^t$ die Darstellung $(1, 0, 0, 0)^t$ hat?

Aufgabe 30 – Gleichungssysteme:

Seien \mathbb{C}^2 ein Vektorraum über \mathbb{C} und $c \in \mathbb{C}$ eine Konstante. Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} iz_1 + z_2 &= c \\ z_1 - z_2 &= 1 + i \end{aligned}$$

- Bestimmen Sie alle Lösungen in \mathbb{C}^2 des linearen Gleichungssystems.
- Gibt es ein $c \in \mathbb{C}$, so dass das LGS keine Lösung besitzt?

Aufgabe 31 – Determinanten:

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen mithilfe des Entwicklungssatzes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 19 – Permutationen:

Sei $\pi : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ die bijektive Abbildung (sog. *Permutation*) mit $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 3$, $\pi(3) = 1$ und $\pi(4) = 4$. Wir definieren $f_i = e_{\pi(i)}$, wobei e_i , $i = 1, \dots, 4$ die kanonische Basis ist.

- i) Zeigen Sie, dass f_1, \dots, f_4 auch eine Basis ist.
- ii) Stellen Sie die Matrix M der Basiswechsel von e_1, \dots, e_4 nach f_1, \dots, f_4 auf und berechnen Sie $\det(M)$.

Hausaufgabe 20 – Determinante:

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- i) Berechnen Sie $\det(A)$ durch Zeilenumformungen.
- ii) Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen $A^t, A^{-1}, A^2, A \cdot A^t$.