Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
29.04.2010

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

10. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 26 – Elementarumformungen:

Welche der folgenden Matrizen sind durch Zeilen- oder Spaltenumformungen auseinander hervorgegangen? Verwenden Sie, daß Rang eine Invariante unter Elementarumformungen ist.

i) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix}1&0&\pi\\\pi&1&9\\0&0&3\end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&\pi&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

vi) $\begin{pmatrix}0&\pi&0\\0&\pi&0\\0&\pi&0\end{pmatrix}$ vii) $\begin{pmatrix}\pi&0&1\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ viii) $\begin{pmatrix}0&1&1\\3&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ ix) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

Aufgabe 27 – Zeilenumformungen:

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Wir berechnen daraus eine neue Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, indem wir auf A die Zeilenumformung $Z_2 \rightsquigarrow Z_2 + 2Z_1$ und dann auf die so entstandene Matrix die Zeilenumformung $Z_3 \rightsquigarrow Z_3 - Z_1 + 3Z_2$ anwenden. Schreiben Sie nun B als das Produkt zweier Matrizen, von denen eine gleich A ist.

Aufgabe 28 – Inverse Matrix:

Bestimme mit dem aus der Vorlesung erlernten Verfahren die Inversen folgender Matrizen:

a) $\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

Hausaufgabe 17 – Elementarumformungen:

Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen über $\mathbb{R}$

$$\text{i)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{ii)} \quad \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Hausaufgabe 18 – Rang-1-Operatoren:

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Zeigen Sie, daß $\operatorname{rang} A = 1$ genau dann, wenn Vektoren $x \in \mathbb{K}^m \setminus \{0\}$, $y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ mit $A = y \cdot x^*$ existieren.

Finden Sie nun für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$, sodaß $A = y \cdot x^*$.

Bemerkung: x^* ist die Adjungierte von x und $\cdot$ die Matrixmultiplikation. Die Matrix A bezeichnet man auch als Rang-1-Operator. Diese Operatoren werden euch spätestens in der Quantenmechanik wieder begegnen. Dort werden sie in der *Dirac* Notation als $|y\rangle\langle x|$ geschrieben.