Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
15.04.2010

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

9. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 23 – Matrizen linearer Abbildungen:

1) Gibt es eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad f(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}, \quad f(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} ?$$

2) Betrachten wir in $\mathbb{R}^3$ den Vektor $v = \begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix}$ und die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto v \times x.$$

Bestimmen Sie bezüglich einer geeigneten Basis $\mathcal{B}$, sodass die Abbildungsmatrix $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ möglichst einfach ist. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix bezüglich der Standardasis.

Lösung:

1) Nein, eine solche lineare Abbildung existiert nicht. Denn

$$f(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = f(\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}) = \frac{1}{4}f(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}) + \frac{1}{2}f(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\\frac{7}{4}\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = f(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$$

2)

$$v \times x = \underbrace{\begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix}}_{:=b_1} \times \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3x_2\\3x_1-6x_3\\6x_2\end{pmatrix} = x_1\underbrace{\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}}_{:=b_2} + x_2\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\0\\6\end{pmatrix}}_{:=b_3} + x_3\begin{pmatrix}0\\-6\\0\end{pmatrix}$$

Wir whlen die Basis $\mathcal{B} := \{b_1,\ b_2,\ b_3\}$. Man kann festestellen, dass $b_1,\ b_2,\ b_3$ paarweise orthogonal sind. Es folgt

$$b_1 \times (x_1 \cdot b_1 + x_2 \cdot b_2 + x_3 \cdot b_3) = x_2 b_1 \times b_2 + x_3 b_1 \times b_3$$

und somit

$$M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-9\\0&3&0\end{pmatrix}.$$

Bezüglich der Standardbasis ist die Abbildungsmatrix gegeben durch

$$M_f = \begin{pmatrix}0&-3&0\\3&0&-6\\0&6&0\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 24 – Ajungierte Matrizen:

Sei $A := (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die zu A adjungierte Matrix A^* ist gegeben durch:

$$A^* = \overline{A}^t = (\overline{a}_{ji})$$

Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und r eine komplexe Zahl, zeigen Sie:

1) $(A + B)^* = A^* + B^*$
2) $(rA)^* = \overline{r}A^*$ und $(AB)^* = B^*A^*$
3) $(A^*)^* = A$
4) Falls A invertierbar ist, $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

Lösung:

1) $\overline{a_{ji} + b_{ji}} = \overline{a}_{ji} + \overline{b}_{ji}$.
2) $(AB)^* = \left(\overline{B} \cdot \overline{A}\right)^t = \overline{B}^t \cdot \overline{A}^t = B^*A^*$
3) $(A^*)^* = \overline{\left(\overline{A}^t\right)}^t = A$
4) Falls A invertierbar ist, $I = I^* = (AA^{-1})^* = (A^{-1})^* \cdot A^*$

Aufgabe 25 – Das Gaußsche Elinimationsverfahren:

Ist $A \in M^{n \times m}$ und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gegeben, so betrachten wir die durch folgende Umformungen aus A entstandenen Matrizen:

1) Multiplikation der i-ten Zeile mit λ,
2) Addition der j-ten Zeile zur i-ten Zeile,
3) Addition der λ-fachen j-ten Zeile zur i-ten Zeile,
4) Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile.

Zeigen Sie, dass jede Umformung eine lineare Abbildung darstellt.
Lösung: Man kann direkt zeigen, dass die Umformung $f\colon M^{n \times m} \to M^{n \times m}$ jeweils in 1) bis 4) linear ist.

Hausaufgabe 15 – Basistransformation:

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Basen

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \text{ und } \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

gegeben.

1) Berechnen Sie die Transformationsmatrix $[\,\mathrm{Id}\,]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$.

2) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$v = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - 8 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Lösung:

1) Wir betrachten die aus Basisvektoren bestehenden Matizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Die Inverse $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 & 0.2 \\ -0.4 & -2 & 2.2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und somit ist die Transformationsmatrix $[\,\mathrm{Id}\,]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = B^{-1}A = \begin{pmatrix} -0.2 & 2.6 & 2.4 \\ 6.8 & 8.6 & 6.4 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

2) Die Koordinaten des Vektors v bzgl. der Basis $\mathcal{B}$

$$[\,\mathrm{Id}\,]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \cdot v = \begin{pmatrix} 3.8 \\ 39.8 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 16 – Matrizen:

Seien die Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ und $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$\varphi : \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_2 + \xi_3 \\ \xi_3 \\ \xi_1 + \xi_3 + \xi_4 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \psi : \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_3 \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Matrizen $[\varphi]$ bzw. $[\psi]$ der Abbildungen bezüglich der Standardbasis und den Rang der Matrizen.

Lösung:

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\psi] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Rang}([\varphi]) = 3, \quad \mathrm{Rang}([\psi]) = 3$