Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
08.07.2010

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

15. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 41 – Normale Abbildungen:

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Für $T : V \to V$ sind äquivalent:

a) T ist selbstadjungiert

b) T ist normal und $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$

c) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}\ \forall x$.

Beweisen Sie die Äquivalenzen.
Lösung: *a) ⇒ b)*
Ist T selbstadjungiert und $T(v) = \lambda v$ mit $v \neq 0$, so folgt

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle F(v), v\rangle = \langle v, F(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle,$$

also ist $\lambda = \overline{\lambda}$.

b) ⇒ c)

$$\overline{\langle Tv, v\rangle} \overset{\text{HermitescheSymmetrie}}{=} \langle v, Tv\rangle \overset{selbstadjungiert}{=} \langle v, T^* v\rangle = \langle Tv, v\rangle$$

c) ⇒ a) Siehe separate Datei cnacha.pdf

Aufgabe 42 – Orthogonale Abbildungen:

Betrachten Sie $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ sei $F_\alpha \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Abbildung $z \mapsto \alpha z$.

1) Zeigen Sie: F_α ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

2) Zeigen Sie, dass $\langle w, z\rangle = \mathrm{Re}(w\overline{z})$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}$ definiert.

3) Bestimmen Sie alle α, für die F_α eine orthogonale Abbildung ist. Erklären Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

4) Wie sieht die darstellende Matrix $[F_\alpha]^{(1,i)}_{(1,i)}$ aus?

Lösung: Seien $\lambda \in \mathbb{R}, x, y, z \in \mathbb{C}$

1) z.z. $F_\alpha(x + \lambda y) = F_\alpha(x) + \lambda F_\alpha(y)$

$$F_\alpha(x + \lambda y) = \alpha(x + \lambda y) = \alpha x + \lambda\alpha y = F_\alpha(x) + \lambda F_\alpha(y)$$

2) Es gilt $\langle x, z\rangle = Re(x\overline{z}) = Re(x)Re(z) + Im(x)Im(z) = \langle \begin{pmatrix} Re(x) \\ Im(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Re(y) \\ Im(y) \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}^2}$
Wobei $\langle ., .\rangle_{\mathbb{R}^2}$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ darstellt. Da wir hier $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ betrachten, folgen die drei Eigenschaften des Skalarprodukts aus dem Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

3) Es sind alle $\alpha \in \mathbb{C}$ zu bestimmen für die $\langle F_\alpha(x), F_\alpha(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ gilt

$$\begin{aligned}\langle F_\alpha(x), F_\alpha(y)\rangle &= \langle \alpha x, \alpha y\rangle = Re(\alpha x \overline{\alpha y})\\ &= Re(\alpha\overline{\alpha}x\overline{y}) = \|\alpha\|^2 Re(x\overline{y}) = \|\alpha\|^2\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

D.h. es gilt $\langle F_\alpha(x), F_\alpha(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ genau dann wenn $\|\alpha\| = 1$

Geometrische Erklärung: In der komplexen Zahlenebene stellt die Abb. F_α eine Drehstreckung dar. Da eine orthogonale Abb. die Norm (durch das Skalarprodukt induzierte Norm) erhält, darf F_α einen Vektor x weder strecken noch stauchen. Dies ist nur für $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\|\alpha\| = 1$ der Fall.

4) $[F_\alpha]^{(1,i)}_{(1,i)} = \begin{pmatrix} Re(\alpha) & -Im(\alpha) \\ Im(\alpha) & Re(\alpha)\end{pmatrix}$

Aufgabe 43 – Hilberträume:

Sei $l^2 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} | \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty\}$ die Menge aller quadratisch summierbaren Folgen. Wir schreiben im folgenden $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, \dots)$.

a) Zeigen Sie: l^2 wird mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation zu einem komplexen Vektorraum.

b) Zeigen Sie: durch

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^\infty x_i\overline{y_i} \qquad \text{wird eine Abbildung } l^2 \times l^2 \to \mathbb{C}$$

definiert, die l^2 zu einem unitären Raum macht.

c) Geben Sie eine Abbildung $\varphi : l_2 \to l_2$ an, die $\langle\cdot,\cdot\rangle$ erhält, aber nicht bijektiv ist.

d) Sei U die Teilmenge von l_2, deren Elemente nur endlich viele von Null verschiedene Einträge haben, d.h.

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2 | \exists N_0 : x_i = 0 \,\forall i > N_0\}.$$

Zeigen Sie, dass U ein linearer Teilraum von V ist, für den $(U^\perp)^\perp \neq U$ gilt.

Lösung:

a) Da die Menge $\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{C}\}$ zusammen mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum ist, reicht es zu zeigen, dass l^2 ein Untervektorraum ist.
Seien $(a_i), (b_i) \in l^2, \lambda \in \mathbb{C}$

i. Wegen $\sum_{i=0}^\infty 0 < \infty \Rightarrow 0 \in l^2$

ii. z.z. $(a_i + b_i) \in l^2$
Es gilt:

$$\sum_{i=1}^\infty |a_i + b_i|^2 \overset{Dreiecksungl.}{\leq} \sum_{i=1}^\infty |a_i| + 2|a_i||b_i| + |b_i|$$

Wegen $2|a_i||b_i| \leq |a_i|^2 + |b_i|^2$ (Bew.!) und absoluter Konvergenz der Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ und $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(|a_i|^2 + 2|a_i||b_i| + |b_i|^2) \leq 2 * (\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2}_{<\infty} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^2}_{<\infty}) < \infty$$

Es folgt: $(a_i + b_i) \in l^2$

iii. z.z. $(\lambda a_i) \in l^2$

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda a_i|^2 = |\lambda|^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2}_{<\infty} < \infty$$

Es folgt die Behauptung.

b) Seien $x, y, z \in l^2, \lambda \in \mathbb{C}$. Um den Unterraum zu einem unitären Raum zu erweitern, muss die Abbildung die Eigenschaften des inneren Produktes erfüllen.

i. $\langle x, x\rangle \geq 0$ und $(\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ folgt aus $\overline{x_i}x_i = |x_i|^2$ und den entsprechenden Eigenschaften des Betrags

ii. z.z $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

$$\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\sum_{i=1}^{\infty} y_i\overline{x_i}} = \sum_{i=1}^{\infty}\overline{y_i\overline{x_i}} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{y_i} = \langle x, y\rangle$$

iii. z.z. $\langle \lambda x + y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
Sei $\gamma_i := max(|x_i|, |z_i|)$ Wegen:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i\overline{z}_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty}|\gamma_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty}|z_i|^2$$

konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{z}_i$ absolut. Daraus folgt

$$\langle \lambda x + y, z\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}(\lambda x_i + y_i)\overline{z_i} \overset{abs.Konv.}{=} \lambda\sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{z_i} + \sum_{i=1}^{\infty} y_i\overline{z_i} = \lambda\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

c) Betrachte z.B. $\varphi((x_1, x_2, ...)) = (0, x_1, x_2, ..)$. Sie erhält offensichtlich das Skalarprodukt, ist aber nicht surjektiv.

d) Seien $(a_i), (b_i) \in U, \lambda \in \mathbb{C}$

i. z.z $0 \in U$ - scharfes hinschauen

ii. $(a_i + b_i) \in U$
Seien a_n, b_m die letzten Elemente ungleich 0 und oBdA $n \leq m$. Dann ist für $(a_i + b_i)$ mit $N_0 := n$ das geforderte N_0 gegeben.

iii. z.z $(\lambda a_i) \in U$
(λa_i) hat offensichtlich genau so viele Elemente ungleich 0 wie (a_i) für $\lambda \neq 0$, und kein einziges ungleich 0 für $\lambda = 0$

Die einzige Folge $x \in l^2$ für die $\langle x, y\rangle = 0 \forall y \in U$ gilt, ist offensichtlich die Nullfolge, d.h $U^\perp = \{(0, 0, ...)\}$. Weiter gilt für jede Folge $x \in l^2 : \langle x, 0\rangle = 0$. Daraus folgt $(U^\perp)^\perp = l^2$. Da bspw. die Folge $(1/2^i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^2$ mit unendl. vielen von 0 versch.