Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
24.06.2010

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

14. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 38 – Minitest: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

i) Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten von A sind

   a) orthogonal zueinander;
   b) linear unabhängig;
   c) eine Basis des Bildes der zugehörigen Abbildung.

ii) A ist genau dann diagonalisierbar, wenn

   a) A n verschiedene Eigenwerte hat;
   b) A nur einen Eigenwert λ hat und dessen geometrische Vielfachheit n ist;
   c) es in $\mathbb{R}^n$ eine Basis von Eigenvektoren von A gibt.

Lösung:

i) a) Falsch.
   b) Richtig.
   c) Falsch.

ii) a) Falsch.
   b) Falsch.
   c) Richtig.

Aufgabe 39 – Jordansche Normalform:

1. Welche der folgenden Matrizen sind ein Jordanblock?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Welche der folgenden Matrizen sind in Jordannormalform?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. A
2. A, C

Aufgabe 40 – Jordansche Normalform:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -8 & -4 \\ 2 & 1 & -8 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A sowie deren geometrischen und algebraischen Vielfachheit.

ii) Ist A diagonalisierbar?

iii) Sei $a_s := \dim\ker(A - \lambda_i I)^s$. Die Formel $2a_s - a_{s-1} - a_{s+1}$ gibt die Anzahl des Jordanblocks $J^s_{\lambda_i}$ an. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A.

Lösung:

i) Das charakt. Polynom ist gegeben mit:

$$\begin{aligned}
\chi(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -8 & -4 \\ 2 & 1-\lambda & -8 & -4 \\ 1 & 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-1)(1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -8 & -4 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & -4 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (\lambda - 1)[(3-\lambda)(-1-\lambda)^2 + 16 - 4(3-\lambda) + 8(-1-\lambda)] \\
&= (\lambda - 1)(-1-\lambda)[(3-\lambda)(-1-\lambda) + 4] \\
&= (\lambda - 1)^3(-1-\lambda)
\end{aligned}$$

Damit sind die Eigenwerte gegeben mit $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

Nun sind die verallg. Eigenräume zu bestimmen.

Sei $a(\lambda_i)$ = algeb. Vielfachheit zum EW λ_i,
$g(\lambda_i)$ = geo. Vielfachheit zum EW λ_i und V^{λ_i} der verallg. Eigenvektorraum zum Eigenwert λ_i.
Aus der Vorlesung wissen wir, dass $a(\lambda_1) = 3$, $a(\lambda_2) = 1$, $g(\lambda_1) = 2$ und $g(\lambda_2) = 1$.

ii) Da $a(\lambda_1) \neq g(\lambda_1)$, ist A nicht diagonalisierbar.

iii) Die Jordangestalt der Matrix A mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 25 – Eigenwertproblem:

Sei V ein $K-$Vektorraum und $F: V \to V$ linear. Zeigen Sie: Hat F^2+F den Eigenwert -1, so hat F^3 den Eigenwert 1. Ist ein Eigenvektor von F^2+F zum Eigenwert -1 auch Eigenvektor von F^3 zum Eigenwert 1?
Lösung: Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert -1, d.h. es gilt: $(F^2+F)v = -v$. Wegen

$$\begin{aligned}
&(F^2+F)v = -v \\
\Rightarrow &F(F^2+F)v = F(-v) \\
\Rightarrow &F^3 v = -F^2 v - Fv = -(F^2+F)v = -(-v) = v
\end{aligned}$$

ist v Eigenvektor von F^3 zum Egenwert 1.

Hausaufgabe 26 – Gedämpfte Schwingung:

Ist eine Masse an einer Feder aufgehängt und zur Zeit $t=0$ in senkrechter Richtung in die Position $y(0)=\alpha$ mit der Geschwindigkeit $\dot{y}(0)=\beta$ ausgelenkt, so ist die weitere Bewegung bestimmt durch die Differentialgleichung der *gedämpften Schwingung*

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + \omega^2 y = 0, \qquad y(0)=\alpha,\ \dot{y}(0)=\beta.$$

Dabei sind $\omega, \mu \in \mathbb{R}^+$ Konstanten, ω ist durch die Feder und μ durch die Reibung bestimmt. Man macht daraus mit $y_0 = y$ und $y_1 = \dot{y}$ das lineare System erster Ordnung

$$\begin{aligned}
\dot{y}_0 &= y_1, & y_0(0)&=\alpha, \\
\dot{y}_1 &= -\omega^2 y_0 - 2\mu y_1, & y_1(0)&=\beta.
\end{aligned}$$

1) Wie sieht die zugehörige Matrix A aus?

2) Eine Diagonalisierung von A entspricht eine Entkopplung des obigen Systems. Betrachten Sie nur den Fall $\mu^2 \geq \omega^2$ und entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

3) Bestimmen Sie im Falle einer Diagonalisierbarkeit eine Basis aus Eigenvektoren von A.

4) Geben Sie ferner eine Basis des Lösungsraumes von $\dot{y} = Ay$ an. Wie sieht die Lösung des obigen Systems aus?

Hinweise:
Um Lösungen zu erhalten, kann man den Ansatz

$$y(t) = e^{\lambda t} \cdot v$$

benutzen, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dabei gilt folgendes:

1. $y(t) = e^{\lambda t} \cdot v$ ist eine Lösung $\neq 0$ von $\dot{y} = Ay$ genau dann, wenn v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.
   Beweisen Sie diese Aussage.

2. Lösungen $y^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot v_1, \dots, y^{(k)}(t) = e^{\lambda_k t} \cdot v_k$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig sind.

3. Mit $\dot{y} = \frac{d}{dt}y$ bzw. $\ddot{y} = \frac{d^2}{dt^2}y$ wird die erste bzw. zweite Ableitung der Lösung y nach

Insbesondere erhält man mit diesem Ansatz eine Basis des Lösungsraumes, falls A diagonalisierbar ist.
Lösung:

1) Die Matrix ist gegeben mit
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix}$$

2) Sei σ_i die geom. Vielfachheit zu einem Eigenwert λ_i mit $i \in \mathbb{N}$
Um die Diagonalisierbarkeit einer Matrix zu zeigen, ist zu prüfen ob eine Basis aus Eigenvektoren existiert. Das ist der Fall, wenn für eine $n \times n$ Matrix die Summe der geom. Viefachheiten gleich n ist, d.h. $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i = n$ gilt.

   i) Es sind zunächst die Eigenwerte zu bestimmen, d.h. alle $\lambda \in \mathbb{R}$ für die die Matrix $A - \lambda Id$ singulär ist. Das ist der Fall, wenn $det(A - \lambda Id) = 0$ gilt.
$$\begin{aligned} 0 &= det(A - \lambda Id) = -\lambda(-2\mu - \lambda) + \omega^2 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda\mu + \omega^2 \\ \Leftrightarrow \lambda &= -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2} \end{aligned}$$
   Fall 1: Für $\mu^2 = \lambda^2$ ist der einzige Eigenwert mit $\lambda = -\mu$ gegeben.
   Fall 2: $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$ sonst.

   ii) Bestimme die geom. Vielfachheiten.
   Fall 1: Betrachte den Eigenraum für $\lambda = -\mu$, also alle $v \in \mathbb{R}^2$ mit
$$0 = (A - \mu Id)v = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -\omega^2 & -\mu \end{pmatrix} v$$
   Die geom. Vielfachheit ist nur dann gleich 2, wenn $A - \mu Id = 0$. Es folgt $\sigma < 2$. $\Rightarrow$ Für $\mu^2 = \omega^2$ ist A nicht diagonalisierbar.
   Fall 2: Da die Dimension des Eigenraums zu einem gegebenen Eigenwert mind. 1 ist und zwei Eigenwerte existieren, folgt
$$2 \geq \sigma_1 + \sigma_2 \geq 1 + 1$$
   Damit ist A für $\mu^2 > \lambda^2$ diagonalisierbar.

3) Sei wegen 2) $\mu^2 > \omega^2$. Es sind die Eigenräume $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}$ zu den Eigenwerten $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$ zu bestimmen.
Für $\lambda_1 = -\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$ ist
$$A - \lambda_1 Id = \begin{pmatrix} \mu - \sqrt{\mu^2 - \omega^2} & 1 \\ \omega^2 & -\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega^2} \end{pmatrix}$$
Da die geom. Vielfachheit ($= dim(Ker(A - \lambda_1 Id))$) mind. 1 ist, kann eine der beiden Matrix-Zeilen eliminiert werden und der Eigenraum wird nur durch die Gleichung
$$(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega^2})v_1 + v_2 = 0$$
mit $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ bestimmt. Damit ist $E_{\lambda_1} = span\{(1, -\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega^2})^T\}$
Analog bestimmt man $E_{\lambda_2} = span\{(1, -\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega^2})^T\}$.

4) Wegen Hinweis 1) sind zwei Lösungen der DGL mit

$$y^{(1)} = e^{\lambda_1 t)} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega^2)} \end{pmatrix}, y^{(2)} = e^{\lambda_2 t)} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega^2)} \end{pmatrix}$$

gegeben. Diese sind nach Hinweis 2) linear unabhängig. Eine weitere Lösung, die nicht als Linearkombination von $y^{(1)}, y^{(2)}$ dargestellt werden kann, kann wegen Hinweis 2) nicht existeren. Damit bildet $\{y^{(1)}, y^{(2)}\}$ eine Basis des Lösungsraums der DGL.