Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
10.06.2010

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

13. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 35 – Minitest:

In dieser Aufgabe sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Ist λ ein Eigenwert von A zu Eigenvektor v, so ist $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von A^{-1} zum Eigenvektor v.
2) Es gibt keine lineare Abbildung, die den Eigenwert $\lambda = 0$ hat.
3) Es gibt eine lineare Abbildung, die 0 als Eigenvektor hat.
4) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Ist $\mathrm{Kern}(f) \neq \{0\}$, so hat f den Eigenwert $\lambda = 0$.
5) Besitzen zwei Polynome eine gemeinsame Nullstelle, so sind sie linare Abhängig.
6) A kann nicht mehr als n verschiedene Eigenwerte haben.

Lösung:

1) Richtig.
2) Falsch.
3) Falsch.
4) Richtig.
5) Falsch.
6) Richtig.

Aufgabe 36 – LU-Zerlegung:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben

a) Lösen Sie die Gleichung $A \cdot x = b$ durch LU-Zerlegung.
b) Lösen Sie die Gleichung $A \cdot x = b$ durch Cramersche Regel.

Lösung:

a) Die erste Zeile wird mit -2 multipliziert zur zweiten und mit 1 multipliziert zur dritten addiert. Die zweite Zeile wird mit -1 multipliziert zur dritten addiert. Somit ergibt die LU-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Sösung ist $x = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Cramersche Regel.

Aufgabe 37 – Eigenwerte und Eigenfunktionen:

a) Sei V der zweidimensionale Vektorraum über $\mathbb{C}$, der von den beiden Funktionen $f_1(x) := e^x \cos(x)$ und $f_2(x) := e^x \sin(x)$ aufgespannt wird. Zeigen Sie, dass die Ableitung D eine lineare Abbildung von V nach V ist. Stellen Sie die Matrix von D bezüglich der Basis (f_1, f_2) auf und berechnen Sie die Eigenwerte von D. Geben Sie die Eigenvektoren (Eigenfunktionen) von D an!

b) Betrachten Sie den linearen Raum $U := \mathrm{Lin}\{f_n(x) = e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Ableitung D eine lineare Abbildung von U nach U ist. Stellen Sie die Matrix von D bezüglich der Basis $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ auf und berechnen Sie die Eigenwerte von D. Geben Sie die Eigenvektoren von D an! Warum ist "klar", dass $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Basis, d.h. hier, die f_n linear unabhängig sind?

c) Sei $C^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller komplexwertigen unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, und sei $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ der Ableitungsoperator. Berechnen Sie das Spektrum $\sigma(D)$ (d.h. die Menge aller Eigenwerte von D).

Lösung:

a) Aus der Eigenschaft der Differentiation (Analysis II) folgt, dass D linear ist. Es ist noch zu überprüfen, ob $D(\lambda f_1 + \mu f_2) \in V$.

$$D(f_1) = D(e^x \cos x) = e^x \cos x - e^x \sin x$$
$$D(f_2) = D(e^x \sin x) = e^x \sin x + e^x \cos x$$

Also erhalten wir

$$D(f_1) = f_1 - f_2$$
$$D(f_2) = f_1 + f_2$$

Daraus folgt

$$A_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Um die Eigenwerte bzw. die Eigenvektoren zu bestimmen berechnen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Daraus folgt $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Die Eigenvektoren sind $v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = -if_1 + f_2$ und $v_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = if_1 + f_2$

b) Die Linearität von D folgt wiederum aus der elementaren Eigenschaften der Differentiation. Es ist noch zu zeigen

$$Df \in U, \quad \forall f \in U$$

Sei $f(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{in_j x}$. Daraus folgt

$$Df(x) = \sum_{j=1}^{n} i\lambda_j n_j e^{in_j x} \in U$$

Wegen $Df_n = ine^{inx} = inf_n$ ist f_n EV zu dem EW in. Beachte, hier folgt insbesondere, dass die (f_n) linear unabhängig sind. Da EV für verschiedene EW linear unabhängig sind.
Die Abbildungsmatrix ist

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & 2i & & & & & \\ & & i & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & -i & & \\ & & & & & -2i & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

und $\sigma(D) = i\mathbb{Z}$.

c) Wir betrachten $f(X) = e^{cx}$, $c \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$Df(x) = ce^{cx}$$

und somit $\sigma(D) = \mathbb{C}$.

Hausaufgabe 23 – Eigenwerte:

Sei V ein Vektorraum mit Orthonormalbasis v, w. Seien

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

a) Zeigen Sie, die folgenden Vektoren eine Orthonormalbasis von V bilden

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v+w), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v-w)$$

b) Sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, die bzgl. der Basis v, w die Matrix A hat. Zeigen Sie, dass u_1, u_2 aus a) Eigenvektoren von f zu den Eigenwerten $a+b$ bzw. $a-b$ sind.

Lösung:

a)

$$\langle u_1, u_1\rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}(v+w), \frac{1}{\sqrt{2}}(v+w)\rangle = \frac{1}{2}\langle v, v\rangle + \frac{1}{2}\langle w, w\rangle + \langle v, w\rangle = 1,$$
$$\langle u_2, u_2\rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}(v-w), \frac{1}{\sqrt{2}}(v-w)\rangle = \frac{1}{2}\langle v, v\rangle + \frac{1}{2}\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle = 1,$$
$$\langle u_1, u_2\rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}(v+w), \frac{1}{\sqrt{2}}(v-w)\rangle = \frac{1}{2}\langle v, v\rangle - \frac{1}{2}\langle w, w\rangle = 0.$$

b) Sei $f(\frac{v}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(av+bw)$, $f(\frac{w}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(bv+aw)$. Dann ist $f(\frac{1}{\sqrt{2}}(v+w)) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}v) + f(\frac{1}{\sqrt{2}}w) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)(v+w)$.

Hausaufgabe 24 – Eigenwerte:

Wir betrachten $\mathbb{C}^2$ ausgestatted mit dem kanonischen Skalarprodukt. Gegeben seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$ bilden.

b) Zeigen Sie, dass v_1, v_2 Eigenvektoren von A sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

Lösung:

a) Man benutzt das hermitesche Skalarprodukt.

b) $Av_1 = \begin{pmatrix} ai-b \\ bi+a \end{pmatrix} = (a+bi)\cdot v_1$ und $Av_2 = (a-bi)\cdot v_2$. Somit sind $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ die gesuchten EW.