Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
27.05.2010

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

12. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 32 – Minitest:

In dieser Aufgabe sei $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Falls $\det A = \det B$ gilt, so ist $A = B$.
2) Jede reelle Matrix hat eine Determinante.
3) Ist $\det A = 0$, so gilt $A = 0$.
4) Falls $\det A \neq 0$ ist, so besitzt das Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ nur die Lösung $x = 0$.
5) Sei A invertierbar. Dann ist $\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$.

Lösung:

1) Falsch.
2) Falsch.
3) Falsch.
4) Richtig.
5) Richtig.

Aufgabe 33 – Determinante:

Sei $\varphi \in [0, \pi]$ gegeben und $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie $\det(A - \lambda I)$.
b) Lösen Sie die Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$ in $\mathbb{C}$.
c) Für welche φ sind die Lösungen aus b) reellwertig? Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

Lösung:

a) $\det(A - \lambda I) = 1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi$.
b) $\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$.
c) Für $\varphi = 0, \pi$ sind die Lösungen aus b) reellwertig. Geometrisch bedeutet dies, dass während φ variiert $0 \mapsto \pi$ zeichnet λ_1 bzw. λ_2 die obere Hälfte bzw. die untere Hälfte des Einheitskreises.

Aufgabe 34 – Van der Monde Matrix:

Sei $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ und wir betrachten die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

1) Berechnen Sie $\det A$ für $n = 2$ und $n = 3$.
2) Stellen Sie eine Vermutung über $\det A$ für ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$ auf.
3) Beweisen Sie Ihre Vermutung (z.B. anhand vollständiger Induktion mit Gauss-Jordan-Algorithmus).

Lösung:

1) $\det A = x_2 - x_1$ für $n = 2$ und $\det A = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)$ für $n = 3$.
2) Vermutung: $\det A = \Pi_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$ für ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$.
3) Beweis durch vollständige Induktion. Induktionsschritt: Angenommen, die Gleichung gilt für ein $n \in \mathbb{N}$. Da $\det A = \det A^t$ betrachten wir A^t. Jetzt subtrahieren wir von der n-ten Zeile das x_0-fache der $(n-1)$-ten Zeile, von der $(n-1)$-ten Zeile das x_0-fache der $(n-2)$-ten Zeile, usw. bis zur 2. Zeile, von der wir das a_0-fache der 1. Zeile subtrahieren. All diese Operationen verändern den Wert der Determinante nicht, da immer nur Vielfache ganzer Zeilen subtrahiert werden.

   Wir erhalten dann: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & x_1 - x_0 & ... & x_n - x_0 \\ 0 & x_1^2 - x_1 \cdot x_0 & ... & x_n^2 - x_n \cdot x_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1^n - x_1^{n-1} \cdot x_0 & ... & x_n^n - x_n^{n-1} \cdot x_0 \end{vmatrix}$

   Nun subtrahieren wir noch von der 2. bis zur n-ten Spalte die 1. Spalte, es verschwindet dadurch nur die 1 in der ersten Zeile: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & x_1 - x_0 & ... & x_n - x_0 \\ 0 & x_1^2 - x_1 \cdot x_0 & ... & x_n^2 - x_n \cdot x_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1^n - x_1^{n-1} \cdot x_0 & ... & x_n^n - x_n^{n-1} \cdot x_0 \end{vmatrix}$

   Außerdem klammern wir in jeder Spalte aus:

   $$\begin{vmatrix} 1 & 0 \cdot (x_1 - x_0) & ... & 0 \cdot (x_n - x_0) \\ 0 & 1 \cdot (x_1 - x_0) & ... & 1 \cdot (x_n - x_0) \\ 0 & x_1 \cdot (x_1 - x_0) & ... & x_n \cdot (x_n - x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1^{n-1} \cdot (x_1 - x_0) & ... & x_n^{n-1} \cdot (x_n - x_0) \end{vmatrix}$$

   Jetzt kann aus der 2. bis zur n-ten Spalte die Differenz ausgeklammert werden.

   $$(x_1 - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_0) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 1 \\ 0 & x_1 & ... & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}$$

Hausaufgabe 21 – Determinante:

Sei $A, B \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\det A$ und $\det B$.

Lösung: $\det A = 0$, denn die zweite und dritte Spalte sind linear abhängig. $\det B = 1$.

Hausaufgabe 22 – Permutationsmatrix:

Bestimmen Sie die zugehrigen Permutationsmatrizen folgender Permutationen:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$