Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
14.05.2010

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

11. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 29 – Matrizen, Basen, Gleichungssysteme:

Gegeben sei $B := \{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \}$

a) Zeigen Sie: B ist eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

b) Schreiben Sie den Vektor $b := (4, 6, 6, 4)^t$ als Koordinatenvektor bzgl. B.

c) Gegeben sei ein Vektor $c := (1, 2, 3, 4)^t_B$ bzgl. der Basis B. Stellen Sie den Vektor c bzgl. der Standardbasis dar. Geben Sie die Transformationsmatrix von B nach der Standardbasis an.

d) Gibt es eine Basis, bezüglich deren der Vektor $b := (4, 6, 6, 4)^t$ die Darstellung $(1, 0, 0, 0)^t$ hat?

Lösung:

a) Beim Hinsehen stellt man fest, die 4 Vektoren sind linear unabhängig.

b) $(1, 1, 1, 1)^t_B = (4, 6, 6, 4)^t$.

c) $c := (1, 2, 3, 4)^t_B = (10, 18, 21, 16)^t$. Die Transformationsmatrix ist die durch B gegebene Matrix.

d) Ja!! Denn nach dem Basisergänzungssatz läßt sich b zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ erweitern. Bezüglich dieser erweiterten Basis hat b die Darstellung $(1, 0, 0, 0)^t$.

Aufgabe 30 – Gleichungssysteme:

Seien $\mathbb{C}^2$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$ eine Konstante. Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} iz_1 + z_2 &= c \\ z_1 - z_2 &= 1 + i \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen in $\mathbb{C}^2$ des linearen Gleichungssystems.

b) Gibt es ein $c \in \mathbb{C}$, so dass das LGS keine Lösung besitzt?

Lösung:

a) Aus der ersten Gleichung folgt $z_2 = c - iz_1$, in die zweite Gleichung einsetzen erhalten wir $z_1(1 + i) = (1 + i) + c \Rightarrow z_1 = 1 + \frac{c}{1+i}$. *(2 Punkte)*
Diese wieder in die erste Gleichung einsetzen ergibt $z_2 = c - i - \frac{ic}{1+i}$. *(1 Punkte)*

Aufgabe 31 – Determinanten:

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen mithilfe des Entwicklungssatzes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Lösung: $\det A = 3$, $\det B = (x-1)^2(x+2)$

Hausaufgabe 19 – Permutationen:

Sei $\pi : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ die bijektive Abbildung (sog. *Permutation*) mit $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 3$, $\pi(3) = 1$ und $\pi(4) = 4$. Wir definieren $f_i = e_{\pi(i)}$, wobei e_i, $i = 1, \ldots, 4$ die kanonische Basis ist.

i) Zeigen Sie, dass $f_1, \ldots, f_4$ auch eine Basis ist.

ii) Stellen Sie die Matrix M der Basiswechsel von $e_1, \ldots, e_4$ nach $f_1, \ldots, f_4$ auf und berechnen Sie $\det(M)$.

Lösung:

i) Dass $f_1, \ldots, f_4$ auch eine Basis ist, folgt es aus der Bijektivität der Abbildung f.

ii) Die Matrix M der Basiswechsel von $e_1, \ldots, e_4$ nach $f_1, \ldots, f_4$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $\det(M) = 1$.

Hausaufgabe 20 – Determinante:

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Berechnen Sie $\det(A)$ durch Zeilenumformungen.

ii) Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen $A^t, A^{-1}, A^2, A \cdot A^t$.

Lösung:

i) Durch Zeilenumformungen (mit 3 Zeilenvertauschungen) erhalten wir die Zeilenstufenform,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{-81}{20} \end{pmatrix}$$

und somit $\det(A) = 81$.

ii) $\det(A^t) = \det(A)$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, $\det(A^2) = \det^2(A)$, $\det(A \cdot A^t) = \det(A) \cdot \det(A^t)$.