Fachbereich Mathematik
Prof. B. Farkas
Yong He
29.04.2010

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 26 – Elementarumformungen:

Welche der folgenden Matrizen sind durch Zeilen- oder Spaltenumformungen auseinander hervorgegangen? Verwenden Sie, daß Rang eine Invariante unter Elementarumformungen ist.

i) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix}1&0&\pi\\\pi&1&9\\0&0&3\end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&\pi&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

vi) $\begin{pmatrix}0&\pi&0\\0&\pi&0\\0&\pi&0\end{pmatrix}$ vii) $\begin{pmatrix}\pi&0&1\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ viii) $\begin{pmatrix}0&1&1\\3&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ ix) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

Lösung: Die Matrizen ii), v), ix) haben Rang 3. Die Matrizen i), iii), vii), viii) haben den Rang 2 und die Matrizen iv), vi) haben den Rang 1. Da der Rang einer Matrix unter Elementarumformungen erhalten bleibt, läßen sich Matrizen mit gleichem Rang durch Elementarumformungen ineinander überführen.

Aufgabe 27 – Zeilenumformungen:

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Wir berechnen daraus eine neue Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, indem wir auf A die Zeilenumformung $Z_2 \rightsquigarrow Z_2 + 2Z_1$ und dann auf die so entstandene Matrix die Zeilenumformung $Z_3 \rightsquigarrow Z_3 - Z_1 + 3Z_2$ anwenden. Schreiben Sie nun B als das Produkt zweier Matrizen, von denen eine gleich A ist.

Lösung: Aus $Z_2 \rightsquigarrow Z_2 + 2Z_1$ folgt

$$E_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Aus $Z_3 \rightsquigarrow Z_3 - Z_1 + 3Z_2$ folgt

$$E_2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&3&1\end{pmatrix}$$

Wir erhalten $B = E_2 \cdot E_1 \cdot A$ und somit

$$E_2 \cdot E_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\5&3&0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 28 – Inverse Matrix:

Bestimme mit dem aus der Vorlesung erlernten Verfahren die Inversen folgender Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{Z_1+Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{3}Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{2Z_1-Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Bei der zweiten Matrix führen wir die Umformungen $Z_1 - Z_3$, $Z_2 - Z_1$ und $Z_3 - Z_2$ und erhalten die Inverse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 17 – Elementarumformungen:

Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen über $\mathbb{R}$

$$\text{i)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{ii)} \quad \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Lösung:

i) Durch elementare Umformungen gelangen wir zu Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Für $t = 0$ haben wir $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rang} = 2$

Für $t \neq 0$ erhalten wir die Zeilenstufenform $\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & t^3 - 2t \end{pmatrix}$

Daher für $t = \pm\sqrt{2}$ ist die Zeilenstufenform $\begin{pmatrix} 1 & \pm\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \pm\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rang} = 2$

und für $t \neq 0$ und $t^2 \neq 2$ Rang $= 3$

Hausaufgabe 18 – Rang-1-Operatoren:

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Zeigen Sie, daß rang$A = 1$ genau dann, wenn Vektoren $x \in \mathbb{K}^m \setminus \{0\}$, $y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ mit $A = y \cdot x^*$ existieren.

Bemerkung: x^* ist die Adjungierte von x und $\cdot$ die Matrixmultiplikation. Die Matrix A bezeichnet man auch als Rang-1-Operator. Diese Operatoren werden euch spätestens in der Quantenmechanik wieder begegnen. Dort werden sie in der *Dirac* Notation als $|y\rangle\langle x|$ geschrieben.

Lösung: $\Longrightarrow$

$A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ mit Rang $A = 1$. Wir wählen eine Spalte von A, $a_{\cdot j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$. Da Rang $A = 1$ ist, sind alle anderen Spalten Vielfache von von $a_{\cdot j}$. Wir schreiben diese Vielfache vektoriell $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ mit $\lambda_j = 1$.

Wir wählen $y = a_{\cdot j}$ und $x = \lambda$. Es folgt

$$A = y \cdot x^t$$

$\Longleftarrow$

Es sei nun $A = y \cdot x^t$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$. Dann ist

$$A = \big(x_1 \cdot y, \ldots, x_m \cdot y\big)$$

d.h. alle Spalten von A sind Vielfache von y und somit Rang $A = 1$.

Wir wählen $x = y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und es ist $A = y \cdot x^t$.