Fachbereich Mathematik
PD Dr. Ulf Lorenz
M.Sc. Franziska Kartzow

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
8. Juli 2010

6. Übungsblatt zur „Algorithmischen Diskreten Mathematik“

ACHTUNG : Bitte geben Sie die Lösungen zu den Hausübungen am **8. Juli** in den **Gruppenübungen** ab. Die korrigierten Hausübungen erhalten Sie dann in der darauffolgenden Woche in den Gruppenübungen zurück.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Heap-Sort)
Sortieren Sie den folgendes Array mit Hilfe des Heap-Sort-Algorithmus: (3,1,4,1,5,9,2).

Aufgabe G2 (Aktualisierung eines Flusses)
Es sei $D = (V, E)$ ein Digraph mit Quelle s und Senke t und ganzzahligen Kapazitäten $c_a \geq 0$ für alle $a \in E$. Außerdem sei ein ganzzahliger maximaler Fluss x in G gegeben. Nun wird die Kapazität einer einzelnen Kante

(a) um 1 erhöht,

(b) um 1 verringert.

Geben Sie einen Algorithmus der Komplexität $\mathcal{O}(|V| + |V|)$ an, der einen maximalen Fluss in dem jeweiligen veränderten Netzwerk bestimmt.

Aufgabe G3 (Satz von Menger)

(a) Ein gerichteter Graph $D = (V, A)$ heißt k-fach stark zusammenhängend, wenn für jedes Paar (s, t) von Knoten und jede Kantenmenge $B \subseteq A$ mit $|B| \leq k - 1$ der gerichtete Graph $(V, A \setminus B)$ einen gerichteten (s, t)-Weg enthält. Beweisen Sie:

Satz von Menger (Kantenform) Ein gerichteter Graph ist genau dann k-fach stark zusammenhängend, wenn es zu jedem Paar (s, t) von Knoten mindestens k gerichtete (s, t)-Wege gibt, die keine Kante gemeinsam haben.

(b) Ein gerichteter Graph $D = (V, A)$ heißt k-fach knotenzusammenhängend, wenn für jedes Paar (s, t) von Knoten und jede Knotenmenge $W \subseteq V$ mit $|W| \leq k - 1$ der Graph $D - W$ einen gerichteten (s, t)-Weg enthält. Beweisen Sie:

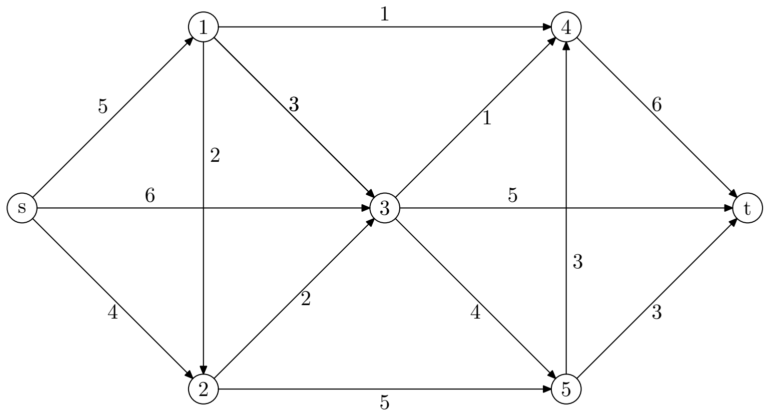
Satz von Menger (Knotenform) Ein gerichteter Graph ist genau dann k-fach knotenzusammenhängend, wenn es zu jedem Paar (s, t) von Knoten mindestens k gerichtete (s, t)-Wege gibt, die keinen Zwischenknoten gemeinsam haben.

(c) Ersetzen Sie in (a) und (b) *gerichtet* jeweils durch *ungerichtet*. Gelten beide Aussagen dann immer noch?

Hausübung

Aufgabe H1 (Ford-Fulkerson) (4 Punkte)

Berechnen Sie den maximalen Fluss von s nach t des folgenden Graphen und beweisen Sie die



Optimalität des Flusses.

Aufgabe H2 (Sortieren) (4 Punkte)

In dieser Übung sollen Sie sich mit einer Variante von Quick-Sort beschäftigen:

Algorithmus QuickSort(a,l,r)

Input: Ein Array a der Länge n mit $a[i] \in \mathbb{Z}$, untere und obere Grenzen l, r mit $1 \leq l \leq r \leq n$.

Output: Das Array a mit $a[l] \leq a[l+1] \leq \ldots \leq a[r]$.

(1) Setze $i = l - 1$ und $j = r$.

(2) `While` $i < j$ `Do`

(3) `Do` i = i + 1 `While` $a[i] \leq a[r]$.

(4) `Do` j = j - 1 `While` $(a[j] \geq a[r]$ und $j \geq i)$.

(5) `If` $j > i$ `Then` Tausche $a[j]$ und $a[i]$.

(6) `End While`

(7) Tausche $a[i]$ und $a[r]$.

(8) `If` $l < i - 1$ `Then` QuickSort $(a, l, i - 1)$.

(9) `If` $i + 1 < r$ `Then` QuickSort $(a, i + 1, r)$.

(10) Gib a aus.

Der erste Aufruf erfolgt mit QuickSort(a,1,*length*(a)).

(a) Sortieren Sie die folgende Zahlenfolge mit der oben angebenen Variante von Quicksort.
(12, 3, 8, 13, 5, 2, 9, 4, 5, 3, 7)

(b) Beschreiben Sie allgemein die Gestalt von zu sortierenden Zahlenfolgen, so dass Quicksort den maximalen Aufwand $O(n^2)$ bzw. den minimalen Aufwand $O(n \log(n))$ benötigt und konstruieren Sie aus den ersten zehn natürlichen Zahlen jeweils eine Beispielfolge.

Aufgabe H3 (4 Punkte)

Sei $(D = (V, E), u, s, t)$ ein Flussnetz mit ganzzahligen Kapazitäten $u(e) \in \mathbb{Z}$ für alle Kanten $e \in E$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) Sind alle Kapazitäten gerade Zahlen, so existiert ein maximaler $s-t-$Fluss f, so dass $f(e)$ für alle Kanten $e \in E$ gerade ist.

(b) Sind alle Kapazitäten ungerade Zahlen, so existiert ein maximaler $s-t-$Fluss f, so dass $f(v)$ für alle Kanten $e \in E$ ungerade ist.

Aufgabe H4 (Netzwerkeigenschaften) (5 Punkte)

Sei $N = (D = (V, E), c, s, t)$ ein Netzwerk, also ein gerichteter Graph G zusammen mit Kantengewichten $c(u, v)$ für jede Kante $(u, v) \in E$, Quelle s und Senke t. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an!

(a) Wenn $f : E \to \mathbb{R}$ ein maximaler Fluss für N ist, dann gilt entweder $f(u, v) = 0$ oder $f(u, v) = c(u, v)$ für jeden Bogen $(u, v) \in E$.

(b) N besitzt einen maximalen Fluss, für den gilt, dass entweder $f(u, v) = 0$ oder $f(u, v) = c(u, v)$ für jeden Bogen $(u, v) \in A$.

(c) Wenn alle Kapazitäten verschieden sind, dann ist der minimale Schnitt eindeutig.

(d) Wenn jede Kapazität mit einer positiven Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert wird, dann bleibt jeder minimale Schnitt ein minimaler Schnitt des geänderten Netzwerkes.

(e) Wenn zu jeder Kapazität eine positive Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ addiert wird, dann bleibt jeder minimale Schnitt ein minimaler Schnitt des geänderten Netzwerkes.