Fachbereich Mathematik
PD Dr. Ulf Lorenz
M.Sc. Franziska Kartzow

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
24. Juni 2010

5. Übungsblatt zur „Algorithmischen Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Wir betrachten im folgenden stets einen gewichteten ungerichteten, zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ mit Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{N}$. Beweisen Sie folgende Aussagen über Spannbäume:

(a) Sei $e \in E$ eine Kante, die auf keinem Kreis in G liegt (d.h. es existiert kein Kreis in G, der e enthält). Dann ist e in jedem minimialen Spannbaum von G enthalten.

(b) Sei G ein Graph mit paarweise verschiedenen Kantengewichten. Dann existiert nur ein einziger minimaler Spannbaum von G (d.h. der minimale Spannbaum von G ist eindeutig).

Aufgabe G2

(a) Sei (u, v) eine Kante eines minimalen Spannbaums eines Graphen $G = (V, E)$. Zeigen Sie, dass (u, v) eine leichte, kreuzende Kante bezüglich eines Schnittes von G ist.

(b) Wenn es für jeden Schnitt eines Graphen G genau eine leichte, den Schnitt kreuzende, Kante gibt, dann hat der Graph G einen eindeutigen minimalen Spannbaum. Zeigen Sie diese Aussage und zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht gilt.

Aufgabe G3

Sei (i, j) eine Kante minimalen Gewichts in einem Graphen $G = (V, E)$. Zeigen Sie, dass immer ein minimal aufspannender Baum T existiert, in dem diese Kante enthalten ist. Enthält jeder minimal aufspannende Baum von G diese Kante?

Hausübung

Aufgabe H1 (Anagramme finden) (6 Punkte)

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit sogenannten Anagrammen: Zwei Worte A und B sind Anagramme voneinander, wenn beide genau dieselben Buchstaben enthalten, und zwar jeweils mit der gleichen Häufigkeit. Dabei wird nicht zwischen Groß- und Kleinbuchstaben unterschieden. Ein paar Beispiele: “Logarithmus” und “Algorithmus”, “sortieren” und “storniere”, “Liste” und “steil”, “Nepal” und “plane”. Hingegen ist z.B. “Krume” kein Anagramm von “Kummer”, weil der Buchstabe ’m’ nicht die gleiche Häufigkeit hat. Wir nehmen nun an, wir erhalten ein Wörterbuch mit vielen Wörtern, und müssen alle Anagramme darin finden. Überlegen Sie sich einen Algorithmus, mit dem man diese Aufgabe möglichst effizient lösen kann. Beschreiben Sie den Algorithmus in Worten oder in Pseudocode. Die Beschreibung sollte so genau sein, dass eine Studienkollegin oder ein Studienkollege damit den Algorithmus alleine implementieren könnte. Welche asymptotische Laufzeit hat dieser Algorithmus im schlechtesten Fall? Von welchen Eigenschaften (Parametern) der gegebenen Menge von Wörtern hängt diese Laufzeit ab?

Aufgabe H2 (Vom Verhältnis von Bäumen und Wäldern) (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass man mit einem Algorithmus für minimal aufspannende Bäume auch einen Wald maximalen Gewichts bestimmen kann.

(b) Zeigen Sie, dass man mit einem Algorithmus zur Bestimmung maximaler Wälder auch einen minimal aufspannenden Baum berechnen kann.

Aufgabe H3 (Aktualisierung eines Spannbaums) (6 Punkte)

Sei T^* ein minimaler Spannbaum für den ungerichteten Graphen $G = (V, E)$. Beschreiben Sie einen Algorithmus, um einen minimalen Spannbaum in dem neuen Graphen zu finden, der durch folgende Szenarien entsteht:

(a) Wir löschen eine Kante $(i, j) \in E$ aus dem Graphen.

(b) Wir fügen eine neue Kante (i, j) zu E hinzu.

Zeigen Sie, dass Ihre Algorithmen korrekt einen neuen Spannbaum finden, und benennen Sie die Laufzeiten.

Fussballspiel

Habt ihr Lust den Mitarbeitern zu zeigen, dass ihr auch auf dem Fussballfeld richtig was zu bieten habt?
Dann nutzt die Chance beim Spiel “Mitarbeiter vs. Studenten” am 08. Juli um 16:00 Uhr.
Weitere Infos und Anmeldelisten liegen im 2. Stock des S2|15 aus.