Fachbereich Mathematik
PD Dr. Ulf Lorenz
M.Sc. Franziska Kartzow

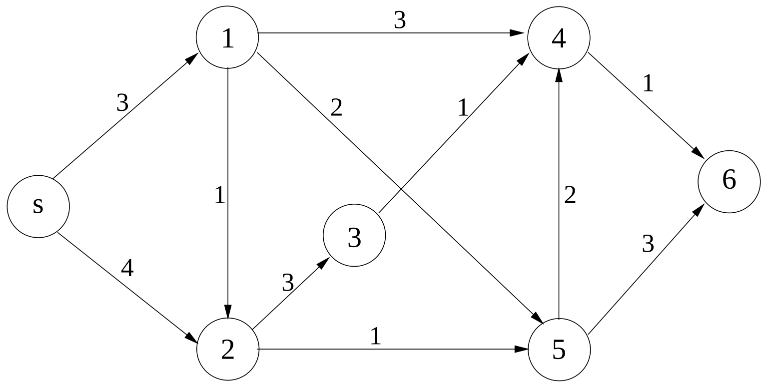
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
10. Juni 2010

4. Übungsblatt zur „Algorithmischen Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Kürzeste Wege)



(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus einen kürzesten Weg von s zu allen anderen Knoten und geben Sie den Kürzesten-Wege-Baum an.

(b) Ist der Kürzeste-Wege-Baum eindeutig?

(c) Verändern Sie das Gewicht von Bogen $(3, 4)$ auf -2. Zeigen Sie, dass der Dijkstra-Algorithmus in diesem Fall nicht korrekt funktioniert.

Aufgabe G2 (Kürzeste Wege)

Zeigen Sie, dass das Problem, einen kürzesten ungeraden Kreis in einem Digraphen mit nichtnegativen Bogengewichten zu finden, mit einem Algorithmus zur Bestimmung kürzester Wege gelöst werden kann.

Aufgabe G3 (Ziegenaufgabe)

Ein Mann soll einen Wolf, eine Ziege und einen Korb Kohl über einen Fluss transportieren. Er hat jedoch nur ein Boot mit zwei Plätzen zur Verfügung. Ist es möglich, alle drei sicher auf das andere Ufer zu bringen?

Beachten Sie, dass sowohl der Wolf und die Ziege als auch die Ziege und der Korb Kohl nie allein auf einer Seite des Flusses sein dürfen, weil sonst die Ziege beziehungsweise der Kohl gefressen wird.

Formulieren Sie dieses Problem als Kürzeste-Wege-Problem und lösen Sie es. Falls es eine Lösung gibt, wie oft muss der Mann den Fluss überqueren?

Hausübung

Aufgabe H1 (Algorithmen) (6 Punkte)

Gesucht ist ein Algorithmus, der bei Eingabe eines ungerichteten, zusammenhängenden Graphen G in Adjazenzlistendarstellung in Zeit $\mathcal{O}(|V|+|E|)$ bestimmt, ob der Graph bipartit ist oder nicht.

(a) Geben Sie einen Algorithmus an, der dieses Problem löst.

(b) Beweisen Sie die Korrektheit und analysieren Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus.

Aufgabe H2 (Graphen) (6 Punkte)

Gegeben sei der Graph aus Abbildung 1

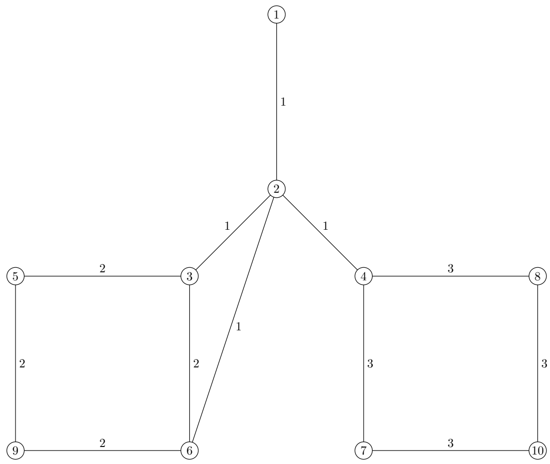


Abbildung 1: Ein Graph

(a) Besitzt der Graph einen Eulerschen Weg (mit Begründung)?

(b) Besitzt der Graph einen Hamiltonschen Kreis (also einen Kreis, bei dem jeder Knoten im Graphen nur einmal benutzt wird)? Begründen Sie Ihre Aussage!

(c) Erstellen Sie für den Graphen eine Adjazenzmatrix und eine Adjazenzliste.

(d) Führen Sie auf dem Graphen je einmal den BFS-Algorithmus und einmal den DFS-Algorithmus durch und geben Sie jeweils eine mögliche Reihenfolge in der die Knoten besucht werden, die Anzahl der Zusammenhangskomponenten, die Menge der Knoten der Zusammenhangskomponenten und die Summe der Gewichte des gefundenen aufspannenden Waldes an.

Aufgabe H3 (Charakterisierung kürzester Wege) (4 Punkte)

(a) Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph, der keine negativen Kreise enthält. Zeigen Sie: Ist $(s = i_0, i_1, \dots, i_k = t)$ ein kürzester einfacher Weg von s nach t, so ist auch jeder Teilweg $(i_0, \dots, i_l)$ für $l = 1, \dots, k-1$ ein kürzester einfache Weg von s nach i_l.

(b) Zeigen Sie, dass diese Aussage nicht gilt, wenn der Graph negative Kreise enthält.

Aufgabe H4 (Kürzeste Wege mit mehreren Startknoten) (4 Punkte)

Stellen Sie sich folgende Situation vor: Sie wollen in einem Graphen $G = (V, E)$ einen kürzesten Weg vom Start zum Ziel bestimmen. Allerdings stehen Ihnen n mögliche Startknoten s_i und m mögliche Endknoten t_i zur Verfügung. Wie würden Sie dieses Problem (möglichst effizient) lösen? (Beweis!)

Hinweis: Die Bestimmung von allen $n \cdot m$ kürzesten Wegen und das Vergleichen ist nicht „möglichst effizient“ im Sinne der Aufgabe.