Fachbereich Mathematik
PD Dr. Ulf Lorenz
M.Sc. Franziska Kartzow

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
20. Mai 2010

3. Übungsblatt zur „Algorithmischen Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei CLIQUE folgendes Problem:

Eingabe: Ein Graph G, und eine natürliche Zahl k.

Ausgabe: "ja", falls G eine CLIQUE der Größe k enthält. Sonst "nein".

Sei INDEPENDENT SET (IS) folgendes Problem

Eingabe: Ein Graph G, und eine natürliche Zahl k.

Ausgabe: "ja", falls G eine unabhängige Menge von k Knoten enthält, die paarweise nicht miteinander verbunden sind. Sonst "nein".

Zeigen Sie CLIQUE $\leq_p$ IS.

Aufgabe G2 (Bipartite Graphen)

Zeigen Sie, dass ein Graph $G = (V, E)$ genau dann bipartit ist, wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.

Aufgabe G3 (Eulersche Graphen)

Ein Weg in einem Graphen $G = (V, E)$ heißt *Eulerweg*, wenn er jede Kante $e \in E$ genau einmal enthält. Ein Eulerweg, der ein Kreis ist, heißt *Eulerkreis*. Der Graph G heißt *eulersch*, wenn es einen Eulerkreis für G gibt.

(a) Welche der Graphen in Abbildung 1 sind eulersch?

(b) Sei nun G ein zusammenhängender Graph. Geben Sie an, welche Bedingungen G notwendigerweise erfüllen muss, damit G eulersch ist.

(c) Sind diese Bedingungen auch hinreichend?

Aufgabe G4 (Primzahlen und $\mathcal{NP}$)

In der Komplexitätstheorie bezeichnet co-$\mathcal{NP}$ eine Komplexitätsklasse. In ihr sind genau die Probleme enthalten, deren Komplemente zu $\mathcal{NP}$ gehören. Nehmen Sie für die folgende Aufgabe an, dass für die Kodierungslänge einer natürlichen Zahl n gilt, dass $\langle n \rangle = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.[2]

(a) Zeigen Sie, dass das Problem festzustellen, ob eine vorgegebene Zahl eine Primzahl ist, in co-$\mathcal{NP}$ ist.

[2] Dies entspricht der üblichen Kodierung einer natürlichen Zahl n als Binärzahl, wofür $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ Stellen benötigt werden.

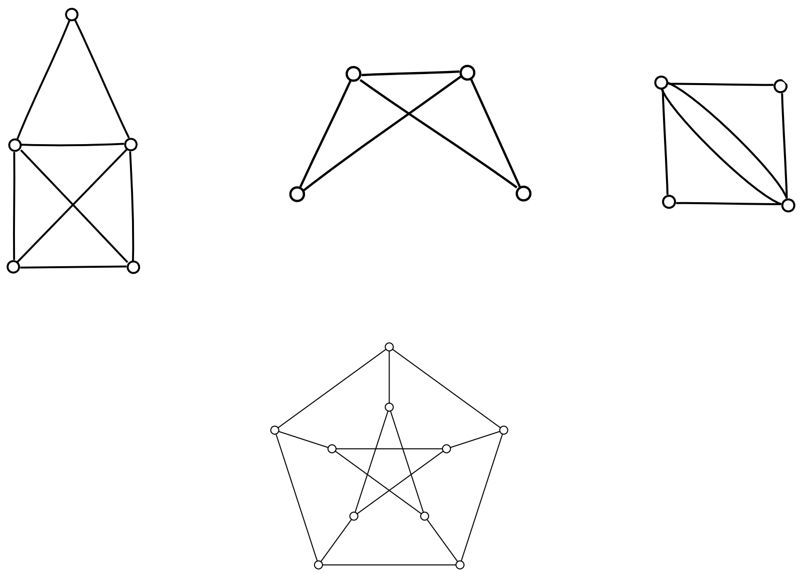

Abbildung 1: Eulersch – oder nicht?

(b) Überlegen Sie kurz, was man bräuchte um zu zeigen, dass das Problem auch in $\mathcal{NP}$ liegt, und erläutern Sie kurz, warum der Beweis wohl nicht so einfach ist, wie der in Teil (a).

(c) Zeigen Sie, dass das Problem in $\mathcal{P}$ liegt, wenn man annimmt, dass $\langle n \rangle = n$ ist.

Bemerkung: (Zitat aus Wikipedia: http://de.wikipedia.org/wiki/Primzahltest): Die den Primzahltest zugrundeliegende Problemstellung, festzustellen, ob eine Zahl prim ist, wird in der Informatik als PRIMES bezeichnet. Bis ins Jahr 2002 erhoffte man sich in der Komplexitätstheorie von ihr neue Erkenntnisse in Bezug auf das $\mathcal{P}$-$\mathcal{NP}$-Problem. Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ gilt, muss nach dem Satz von Ladner ein Problem in $\mathcal{NP} \setminus \mathcal{P}$ existieren, welches nicht $\mathcal{NP}$-vollständig ist. PRIMES galt als ein potenzieller Kandidat für ein solches Problem.
Dies lag daran, dass PRIMES sowohl in der Komplexitätsklasse $\mathcal{NP}$ als auch in der Komplexitätsklasse co-$\mathcal{NP}$ liegt, und demnach nicht $\mathcal{NP}$-vollständig sein konnte. Man kannte jedoch keinen nicht-probabilistischen Lösungsalgorithmus mit polynomieller Laufzeit. Daher war es fraglich, ob PRIMES auch in der Komplexitätsklasse $\mathcal{P}$ liegt.
2002 wurde jedoch von Agrawal, Kayal und Saxena mit dem AKS-Primzahltest ein solcher polynomieller Primzahltest gefunden. Damit war die lange Zeit offene Frage, ob PRIMES in $\mathcal{P}$ liegt, beantwortet. Dies brachte jedoch keine weitere Erkenntnis zum $\mathcal{P}$-$\mathcal{NP}$-Problem.

Hausübung

Aufgabe H1 (Eigenschaften von Bäumen) (6 Punkte)

Beweisen Sie, dass für einen Graphen $G = (V, E)$ mit $n \geq 2$ Knoten die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) G ist ein Baum.

(b) G ist zusammenhängend und enthält $n - 1$ Kanten.

(c) G enthält $n - 1$ Kanten, aber keinen Kreis.

(d) G ist minimal zusammenhängend (d.h. G ist zusammenhängend und $G \setminus \{e\}$ ist nicht zusammenhängend für alle $e \in E$).

(e) G enthält keinen Kreis und bei Hinzufügen einer Kante wird genau ein Kreis erzeugt.

(f) Für je zwei Knoten u und v aus V gibt es genau einen $[u, v]$-Weg in G.

Aufgabe H2 (Der komplementäre Graph) (4 Punkte)

Das Komplement $\overline{G}$ von $G = (V, E)$ ist der Graph auf V, in dem zwei Ecken genau dann benachbart sind, wenn sie es in G nicht sind. (Formal: $\overline{G} := (V, \binom{[n]}{2} \setminus E)$, wobei $\binom{[n]}{2} := \{\{i, j\} \,|\, i \neq j \in \{1, \ldots, n\}\}$.)

Zeige: Ist G ein ungerichteter Graph, so ist G oder $\overline{G}$ zusammenhängend.

Aufgabe H3 (Touren und einfache Wege) (4 Punkte)

Eine *Tour* durch einen Graphen ist ein Weg, der keine Kante doppelt enthält. Ein *einfacher Weg* ist ein Weg, in dem kein Knoten mehrfach auftritt. Es sei nun $G = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Jede $[u, v]$-Tour enthält einen $[u, v]$-einfachen-Weg. Eine kürzeste (bezüglich einer Gewichtung $c : E \to (R)^+$) $[u, v]$-Tour ist ein $[u, v]$-einfacher-Weg.

(b) Ist der Grad $d(v) \geq \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$ für alle $v \in V$, dann existiert zwischen je zwei Knoten ein einfacher Weg, der aus höchstens 2 Kanten besteht.

Aufgabe H4 (Reduktion) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das SUBSETSUM $\leq_p$ PARTITION gilt.

Problem : SUBSETSUM

gegeben : $a_1, ..., a_i, b \in \mathbb{N}$

gesucht : $T \subseteq \{1, ..., i\}$ mit $\sum_{k \in T} a_k = b$

Problem : PARTITION

gegeben : $a_1, ..., a_l \in \mathbb{N}$

gesucht : $T \subseteq \{1, ..., l\}$ mit $\sum_{k \in T} a_k = \sum_{k \notin T} a_k$