Fachbereich Mathematik
PD Dr. Ulf Lorenz
M.Sc. Franziska Kartzow

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
22. April 2010

1. Übungsblatt zur „Algorithmischen Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Aufgabe G1
Es sei folgende Rekurrenz gegeben:

$$T(1) = 0 \qquad T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + 2^{k+1} - 1 \qquad \text{für } k \geq 0$$

Beweisen Sie, dass $T(2^k) = 2 \cdot k \cdot 2^k - (2^k - 1)$ gilt.

Aufgabe G2
Der Binomialkoeffizient spielt eine wichtige Rolle in der Kombinatorik. Er beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten aus einer Menge mit n verschiedenen Objekten k auszuwählen (ohne zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge. Der Binomialkoeffizient ist durch folgende Formel gegeben:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- Zeigen Sie zunächst, dass
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$
gilt.

- Zeigen Sie nun folgende Formel:
$$\sum_{i=1}^{n} i = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \qquad \text{für } n \geq 2.$$

Aufgabe G3 (Kombinatorik)

(a) Max möchte für ein Gruppenfoto seine 11 Freunden in zwei Reihen anordnen. Wie viele Möglichkeiten hat er?

(b) Ein Bit kann zwei Zustände (0 oder 1) annehmen. Ein Byte besteht aus 8 Bits (z.B. 01101011). Wie viele verschiedene Bytes gibt es?

(c) An der Fussball-WM 2010 werden 32 Nationen teilnehmen. Wie viele Möglichkeiten gibt es
- für die Teilnehmer des Halbfinales (= Runde der letzten 4)?
- für die Reihenfolge auf den ersten 4 Plätzen?

(d) Wie viele verschiedene 'Wörter' erhält man durch Umordnen der Buchstaben des Wortes MATHEMATIK?

Aufgabe G4 (Mengen, Mengen, Mengen)

(a) Seien $A = \{\text{rot, grün, blau}\}$, $B = \{\text{blau, rot, gelb}\}$. Bestimmen Sie die Vereinigung, den Durchschnitt, und die symmetrische Differenz dieser beiden Mengen.

(b) Zählen Sie alle Teilmengen von A auf, und nummerieren Sie sie systematisch durch. Wieviele Teilmengen erhält man?

(c) Wir haben drei Mengen mit 3, 6, bzw. 9 Elementen. Wieviele Elemente können ihre Vereinigung und ihr Durchschnitt mindestens bzw. höchstens enthalten?

(d) Es seien L, M, N Mengen. Machen Sie zunächst eine Skizze und zeigen Sie anschließend folgende Aussage:

$$(M \cap N) \cup L = (M \cup L) \cap (N \cup L).$$

Hinweis: Die symmetrische Differenz Δ zweier Mengen A und B ist gegeben durch

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Kombinatorik)

(a) Zehn Personen warten vor der Essensausgabe in der Mensa.

- Auf wie viele Arten kann die Schlange zusammengesetzt sein?
- Vier der zehn Personen wählen den Eintopf. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Auswahl dieser vier Personen?
- Die vier Eintopfesser stehen direkt hintereinander. Wie viele Schlangen sind möglich?

(b) Ausgehend von Wiesbaden wollen wir 6 der der 16 Hauptstädte der deutschen Bundesländer besuchen. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

(c) Der Frosch Leo kann auf einem Papierstreifen mit nummerierten Feldern | 1 | 2 | 3 | ... | n | ein oder zwei Felder vorwärts springen. Zu Beginn steht er auf Feld 1. Auf wie viele Weisen kann Leo zum Feld n gelangen?

Aufgabe H2 (Symmetrische Differenz)

A und B seien beliebige Mengen.

(a) Was ist die symmetrische Differenz von A und A?

(b) Zeigen Sie, dass

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

gilt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ gilt, und danach die umgekehrte Inklusion.

(c) Bestimmen Sie die symmetrische Differenz von A und B, um eine Menge C zu erhalten. Nun bestimmen Sie die symmetrische Differenz von A und C. Welche Menge erhält man? Schreiben Sie diesen Sachverhalt in einer Formel auf und beweisen Sie ihn. Machen Sie zunächst eine Skizze um sich den Sachverhalt klar zu machen.

Aufgabe H3 (Zwei Beweise zum Binomialkoeffizienten)

Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$.

(a) Zeigen Sie die folgende Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

i. mittels einer kombinatorischen Interpretation,

ii. mithilfe der algebraischen Formel des Bionomialkoeffizienten.

(b) Beweisen Sie desweiteren folgende Formel

$$\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}.$$

i. mithilfe der algebraischen Formel des Bionomialkoeffizienten.

ii. mittels einer kombinatorischen Interpretation.

Aufgabe H4 (Zum Knobeln: Untreue Ehemänner)

In einem kleinen Bergdorf in den Abruzzen tritt der Pfarrer vor seine (vollständig versammelte) Gemeinde und spricht: „In diesem Dorf gibt es Männer, die ihre Frauen beträgen. Ich will keinen selbst enttarnen, aber ich bitte alle Ehefrauen, die sich sicher sind, dass ihr Mann sie betrügt, denselben im Morgengrauen vor die Tür zu setzen."

Nun ist es im Grunde kein Geheimnis, welcher Mann welche Frau mit wem betrügt, der Klatsch und Tratsch funktioniert wie geschmiert und alle sind gut informiert. Alle bis auf die jeweilige Ehefrau. Das ist Ehrensache.

In den nächsten Tagen geht der Pfarrer am Morgen durch die Straßen und hält Ausschau nach ausgesetzten Männern. Aber erst am 60. Tag sitzen einige Männer draußen.

Wieviele sind es, und warum sind sich die Frauen plötzlich so sicher?

Bitte geben Sie die Lösungen zur Hausübung am 29. April in der Vorlesung ab.