



13. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G38 (Konfidenzintervalle)

Bei der Größenmessung in einer Gruppe von 9 Personen ergaben sich folgende Körpergrößen [in cm]:

184.2, 182.6, 185.3, 184.5, 186.2, 183.9, 185.0, 187.1,
184.4.

Diese Messwerte werden als Realisationen der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_9 angenommen, die unabhängig und identisch $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt seien.

- Gib ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.99 für den Erwartungswert μ an, falls die Standardabweichung bekannt ist und $\sigma = 2.4$ [cm] beträgt.
- Welches Konfidenzintervall ergibt sich in (a) für dasselbe Konfidenzniveau, falls die Standardabweichung als unbekannt angenommen wird?
- Ermittle im letzteren Fall ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.9 für die Varianz σ^2 .

Aufgabe G39 (Testverfahren)

Eine neue Sorte von Reagenzgläsern soll mit einer gebräuchlichen Sorte, bei der die mittlere Schmelztemperatur 745 Grad Celsius beträgt, verglichen werden. Bei der neuen Sorte von Reagenzgläsern wurden folgende Temperaturwerte ermittelt (in Grad Celsius):

785 650 730 820 671 790 611 715

828 742 631 750 653 621 720 675

Es wird angenommen, dass die Messwerte x_1, x_2, \dots, x_{16} eine Realisierung von unabhängigen identisch $N(\mu, 4900)$ -verteilten Zufallsvariablen X_1, \dots, X_{16} sind.

Durch Anwendung eines geeigneten Tests zum Niveau $\alpha = 0.05$ überprüfe man

- a) die Hypothese $H_0 : \mu = 745$ gegen $H_1 : \mu \neq 745$,
 b) die Hypothese $H_0 : \mu \geq 745$ gegen $H_1 : \mu < 745$.

Hinweis: Es gilt $\bar{X}_{(16)} = 712$.

Aufgabe G40 (Testverfahren)

Um die Genauigkeit eines neu entwickelten Gerätes zur Messung von Weglängen im Gelände zu kontrollieren, wurde eine bestimmte Strecke von genau 1000 m zehnmal vermessen. Es ergaben sich folgende Meßwerte (in m) :

998.0 1001.0 1003.0 1000.5 999.0 997.5 1000.0 999.5 996.0 998.5

Es wird angenommen, dass die Messwerte eine Realisierung unabhängiger $N(\mu, \sigma^2)$ - verteilter Zufallsvariablen sind.

- a) Überprüfe zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass das Gerät die korrekte Entfernung als Erwartungswert hat.
 b) Das Gerät soll nur dann angeschafft werden, wenn es eine höhere Genauigkeit besitzt als die bisher verwendeten Geräte, deren Messgenauigkeit durch die Varianz von $\sigma_0^2 = 4[m^2]$ charakterisiert ist. Es soll daher mit einem geeigneten Testverfahren zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese überprüft werden, dass das neue Gerät die Varianz der herkömmlichen Geräte nicht unterschreitet.

Beurteile anhand Deines Tests, ob das Gerät angeschafft wird.

Hinweis: Es gilt $\bar{X}_{(10)} = 999.3$ und $S_{(10)}^2 = 3.9$. Für die Quantile $t_{n,p}$ der t_n -Verteilung gilt $t_{n,1-p} = -t_{n,p}$.

Aufgabe G41 (Konfidenzintervalle für Defektwahrscheinlichkeiten)

Man ist an einem Konfidenzintervall für die Defektwahrscheinlichkeit $\theta \in (0, 1)$ eines Produktionsprozesses interessiert. Um die Anzahl defekter Produkte in einer Stichprobe vom Umfang n zu zählen verwenden wir unabhängig identisch $B(1, \theta)$ -verteilte Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n , wobei $X_i = 1$ für $i = 1, \dots, n$, falls das i -te Produkt defekt ist. Die Anzahl defekter Produkte in der Stichprobe, also die Summe $Y = X_1 + \dots + X_n$, ist dann aufgrund der Unabhängigkeitsannahme $B(n, \theta)$ -verteilt.

- (a) Zeige, dass gilt

$$P_\theta(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{Y - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = P_\theta((Y - n\theta)^2 \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot n\theta(1-\theta)) \approx 1 - \alpha.$$

- (b) Folgere daraus, dass θ mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ im Konfidenzintervall

$$I(X_1, \dots, X_n) = \left[\frac{1}{n + u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} \left(Y + \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{2} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Y \left(1 - \frac{Y}{n}\right) + \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{4}} \right), \right. \\ \left. \frac{1}{n + u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} \left(Y + \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{2} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{Y \left(1 - \frac{Y}{n}\right) + \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{4}} \right) \right]$$

liegt.

- (c) Ein Hersteller von Elektrogeräten möchte eine grössere Lieferung Transistoren auf ihre Qualität testen. Dazu überprüft er 400 zufällig ausgewählte Transistoren, von denen 12 nicht den Qualitätsanforderungen genügen. Berechne ein Konfidenzintervall für die Ausschusswahrscheinlichkeit zum Niveau 0.95.

Aufgabe G42 (Konfidenzintervalle)

Es werden Produktionsmaschinen für Kondensatoren hergestellt. Die Kapazität der Kondensatoren wird als normalverteilt angenommen. Eine Produktionsmaschine besteht die Qualitätskontrolle, wenn der Erwartungswert für die Kapazität der produzierten Kondensatoren (in nF) im Intervall [32,34] liegt. Im Rahmen der Qualitätskontrolle entnimmt ein Maschinenhersteller aus der Kondensatorenproduktion einer Maschine eine Stichprobe und misst folgende Kapazitäten: [Einheit: nF]

31.5 33.5 32.5 33 34.5

- (a) Die Standardabweichung sei unbekannt. Bestimme das Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Kapazität der Kondensatoren μ mit Konfidenzniveau 0.8.
- (b) Die Standardabweichung σ_0 sei nun bekannt. Bestimme das Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ zum Konfidenzniveau 0.95 in Abhängigkeit von σ_0 .
Wie groß darf die Standardabweichung σ_0 der Kapazität der Kondensatoren höchstens sein, damit das Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ zum Konfidenzniveau 0.95 im Intervall [32, 34] liegt.
- (c) Entscheide für die folgenden Aussagen, ob Sie nach den Ergebnissen aus a) und b) richtig oder falsch oder nicht entscheidbar sind. Begründe Deine Antworten.
- 1) Die Standardabweichung sei unbekannt. Dann liegt die Kapazität eines Kondensators mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.8 im Intervall [32, 34].
 - 2) Mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.8 erfüllt die Produktionsmaschine die Qualitätskontrolle, wenn die Standardabweichung für die Kapazität der Kondensatoren unbekannt ist.
 - 3) Die Standardabweichung für die Kapazität sei 1.5 nF. Dann liegt die Kapazität eines Kondensators mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 im Intervall [32, 34].
 - 4) Es sei σ_0 maximal gegeben, so dass das Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ zum Konfidenzniveau 0.95 bei obiger Stichprobe im Intervall [32, 34] liegt. Dann liegt auch der Erwartungswert für die Kapazität der Kondensatoren selbst mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 im Intervall [32, 34].
 - 5) Die Standardabweichung für die Kapazität sei 1.5 nF. Dann erfüllt diese Produktionsmaschine mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 die Qualitätskontrolle.

Aufgabe G43 (Testverfahren)

Eine bestimmte Weizensorte wird auf 9 vergleichbaren, gleich großen Versuchsflächen angebaut. Aus Erfahrung weiß man, dass die Erträge der einzelnen Versuchsflächen als eine

Stichprobe unabhängiger, identisch $N(\mu, 3.24)$ -verteilter Zufallsvariablen angesehen werden können. Es ergibt sich ein arithmetisches Mittel von 105.0 [dz].

- a) Überprüfe mit einem geeigneten Testverfahren die Nullhypothese $H_0 : \mu = 106.0$ auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$.
- b) Welche Entscheidung würde sich auf dem Niveau $\alpha = 0.05$ ergeben?
- c) Überprüfe mit einem geeigneten Testverfahren die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 106.0$ auf dem Niveau $\alpha = 0.01$.
- d) Überprüfe mit einem geeigneten Testverfahren die Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 106.0$ auf dem Niveau $\alpha = 0.01$.

Aufgabe G44 (Testverfahren)

Um die Genauigkeit eines neu entwickelten Gerätes zur Messung von Weglängen im Gelände zu kontrollieren, wurde eine bestimmte Strecke von genau 1000 m zehnmal vermessen. Es ergaben sich folgende Meßwerte (in m) (wie in G40):

998.0 1001.0 1003.0 1000.5 999.0 997.5 1000.0 999.5 996.0 998.5

Es wird angenommen, dass die Messwerte eine Realisierung unabhängiger $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilter Zufallsvariablen sind.

- a) Überprüfe zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass das Gerät mindestens die korrekte Entfernung als Erwartungswert hat.
- b) Überprüfe unter der Voraussetzung, dass $\sigma^2 = 4$ gilt, zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass das Gerät die korrekte Entfernung als Erwartungswert hat.

Hinweis: Es gilt $\bar{X}_{(10)} = 999.3$ und $S^2_{(10)} = 3.9$.

Aufgabe G45 (Testfragen zur Statistik)

Teste Dein Statistik-Wissen: Im Folgenden findest Du ein paar kurze Fragen zu ausgewählten Themen der Statistik, die in der Vorlesung behandelt wurden. Gib jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Es kann auch mehr als eine Antwort korrekt sein.

- (a) Was trifft beim Würfelwurf unter der Laplace-Annahme für die Ereignisse $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ und $C = \{4, 5, 6\}$ zu?
 - i. A und B sind unabhängig
 - ii. B und C sind unabhängig
 - iii. A und C sind unabhängig.
- (b) X sei $R(a, b)$ -verteilt, dann gilt für $\alpha \in \mathbf{R}$:
 - i. αX ist $R(\alpha a, \alpha b)$ -verteilt für $\alpha > 0$
 - ii. αX ist $R(\alpha a, \alpha b)$ -verteilt für $\alpha < 0$
 - iii. $X - \alpha$ ist $R(a - \alpha, b - \alpha)$ -verteilt.

- (c) X und Y seien unabhängig mit $E(X) = 1$, $Var(X) = 3$, $E(Y) = 2$ und $Var(Y) = 4$.
Dann ist:
- i. $E(X + Y) = 3$
 - ii. $Var(X + Y) = 7$
 - iii. $Var(3X + 4Y) = 91$.
- (d) X_1, \dots, X_n seien unabhängig, identisch $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt. Dann gilt für $Y = X_1 + \dots + X_n$:
- i. $P(Y \geq n\mu) = \frac{1}{2}$
 - ii. $P(Y \geq n\mu + \sqrt{n}\sigma) = P(X_1 \leq \mu - \sigma)$
 - iii. $P(Y \leq n\mu + \sigma) = P(X_1 \geq \mu - \sigma)$.
- (e) X_1, \dots, X_n seien unabhängig, identisch $N(0, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariablen mit $\sigma > 1$.
Dann gilt:
- i. $X_1^2 + \dots + X_n^2$ ist χ_n^2 -verteilt
 - ii. $\sigma^2(X_1^2 + \dots + X_n^2)$ ist χ_n^2 -verteilt
 - iii. $\frac{1}{\sigma^2}(X_1^2 + \dots + X_n^2)$ ist χ_n^2 -verteilt.
- (f) X_1, \dots, X_n seien unabhängig, identisch $N(0, \theta)$ -verteilte Zufallsvariablen, $\theta > 0$. Dann gilt für $T_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i^2$:
- i. T_n ist erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta$
 - ii. $\frac{1}{n}T_n$ ist erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta$
 - iii. $\frac{1}{n-1}T_n$ ist erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta$.
- (g) X_1, \dots, X_{100} seien unabhängig, identisch $N(\theta, 25)$ -verteilt, $\theta \in \mathbf{R}$. Für $\tau(\theta) = \theta$ gibt es ein Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha = 0.95$ mit einer Länge von:
- i. 1.96
 - ii. 0.98
 - iii. 3.92.