Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dr. Sarah Drewes
Dr. Dominique Küpper

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2010
7./8./9.07.2010

12. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G33 (Tschebyschevsche Ungleichung, Normalverteilung, zentraler Grenzwertsatz)

Der Durchmesser neu produzierter Autokolben werde durch eine normalverteilte Zufallsvariable X angemessen beschrieben. Aus Erfahrung kennt man die Varianz von X ($\mathrm{Var}(X) = 0.04(mm^2)$), der Erwartungswert ist jedoch unbekannt. Es soll die Mindestanzahl von durchzuführenden Messungen ermittelt werden, so dass die Differenz zwischen dem Erwartungswert und dem arithmetischen Mittel der Messwerte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 kleiner als 0.1(mm) ist.

(a) Bestimme eine obere Schranke für diese Anzahl durch Anwendung der Tschebyschevschen Ungleichung. Benutze dabei den zentralen Grenzwertsatz, um die Verteilung von $\bar{X}_{(n)}$ zu bestimmen.

(b) Bestimme die gesuchte Anzahl exakt. Transformiere dazu (an geeigneter Stelle) auf Standardnormalverteilung und benutze die entsprechende Tabelle.

Aufgabe G34 (Maximum-Likelihood-Schätzer)

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_n$ seien unabhängig und identisch verteilt wie X. Für einen Parameter $\theta > 0$ sei die Dichte der Zufallsvariablen X gegeben durch

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta}\exp(-\frac{x^2}{\theta}) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \le 0 \end{cases} .$$

Bestimme einen Maximum-Likelihood-Schätzer für θ.

Aufgabe G35 (Erwartungstreue und Konsistenz von Schätzern)

Die Zufallsvariablen$X_1, ..., X_n$ seien unabhangig und identisch rechteckverteilt im Intervall $[\theta - 1, \theta + 1]$ (kurz: $R(\theta - 1, \theta + 1)$-verteilt), mit $\theta \in \mathbf{R}$ unbekannt.

a) Zeige, dass das arithmetische Mittel $T_n(X_1, ..., X_n) = \bar{X}_{(n)}$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta$ ist.

b) Ist die Schätzerfolge $T_1, T_2...$ konsistent für $\tau(\theta) = \theta$?

Aufgabe G36 (Dichte, Rechteckverteilung, Tschebyschevsche Ungleichung, Normalverteilung)

Bei der Beladung eines LKW mit Kisten muss darauf geachtet werden, dass das Gewicht der Ladung höchstens 7.8 Tonnen beträgt. Die Gewichte [in kg] der einzelnen Kisten sollen durch identisch stetig verteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ beschrieben werden, für die folgende Dichte angenommen wird:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & \text{für } 105 \leq x \leq 135 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeige, dass f eine Dichte ist.

b) Bestimme den Erwartungswert und die Varianz des Gewichts einer einzelnen Kiste.

c) Bestimme mittels der Ungleichung von Tschebyschev eine Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass das Gesamtgewicht von $n = 64$ dieser Kisten zwischen 7.56 Tonnen und 7.8 Tonnen liegt. (Setze dabei die Unabhängigkeit von $X_1, \ldots, X_{64}$ voraus.)

d) Berechne unter der Unabhängigkeitsannahme einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, dass das zulässige Gewicht der Ladung eingehalten wird, wenn auf dem LKW $n = 64$ Kisten geladen werden. *Hinweis:* Benutze die Normalverteilungstabelle.

Aufgabe G37 (Schätzer und Erwartungstreue)

Um die Präzision einer Waage zu überprüfen, wird n-mal das Gewicht eines Kilogramm-Prototyps gemessen. Die entstehende Messreihe soll als Realisierung von unabhängigen, identisch $N(1, \theta)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit unbekannter Varianz $\theta > 0$ aufgefasst werden.

a) Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer T_n für $\tau(\theta) = \theta$.

b) Ist T_n erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta$?

Hinweis: Die Dichte der $N(\mu, \sigma^2)$ Verteilung ist gegeben durch $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)}$, $t \in \mathbf{R}$.