Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dr. Dominique Küpper
Dr. Sarah Drewes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2010
30.6.&1./2.07.2010

11. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G29 (Regel von der vollständigen Wahrscheinlichkeit, Formel von Bayes)

Wird ein Patient untersucht, ob er eine bestimmte Krankheit hat oder nicht, so gibt es zwei Möglichkeiten, eine falsche Diagnose zu stellen: Man spricht von einem Fehler 1. Art, wenn der Patient erkrankt ist, dies jedoch nicht erkannt wird (falsch-negativ-Befund) bzw. von einem Fehler der 2. Art, wenn der Patient für krank erklärt wird, obwohl er gesund ist (falsch-positiv-Befund). Für den ELISA-Test zur Erkennung von Antikörpern gegen die Immunschwäche HIV wird geschätzt, daß Fehler 1. und 2. Art mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von 0.02 auftreten. Man gehe davon aus, daß eine zu untersuchende Person mit Wahrscheinlichkeit 0.001 erkrankt ist.

a) Zeichne ein Baumdiagramm für diese Situation.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine zufällig ausgewählte Person für krank erklärt?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person tatsächlich erkrankt ist, wenn sie für krank erklärt wurde?

Aufgabe G30 (Erwartungswert und Varianz, stetige Zufallsvariablen)

Die Zufallsvariable X sei stetig verteilt mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

a) Bestimme die Verteilungsfunktion von X.

b) Ermittle die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert der Zufallsvariablen X^2.

c) Bestimme den Erwartungswert und die Varianz von X.

Aufgabe G31 (Binomialverteilung, Poissonverteilung, diskrete Zufallsvariable)

a) Bei einer Lotterie beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Niete bei jedem Zug 0.7. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl an Nieten beim Ziehen von zehn Losen. Bestimme die Verteilung von X sowie die Wahrscheinlichkeit für mindestens acht Nieten.

b) Die Anzahl der Abfragen einer Internetseite, die innerhalb einer Minute registriert werden, lässt sich durch eine Poisson-verteilte Zufallsvariable angemessen beschreiben. Für eine bestimmte Internetseite sei bekannt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05 innerhalb einer Minute keine Abfrage registriert wird. Berechne für diese Seite die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mehr als drei Abfragen innerhalb einer Minute gibt.

Aufgabe G32 (Normalverteilung)

a) Wir gehen von einer normalverteilten Zufallsvariablen Y mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 aus (kurz: $Y \sim N(0,1)$, auch als Standardnormalverteilung bezeichnet) und betrachten die Zufallsvariable $Z = 5 \cdot Y + 100$. Man kann zeigen, dass Z wieder normalverteilt ist. Überprüfe, dass $E(Z) = 100$ und $Var(Z) = 25$ gilt.

b) Die Zufallsvariable X beschreibe die Größe (in *mm*) einer bestimmten Pflanze im Alter von 30 Tagen. Es wird angenommen, dass X normalverteilt ist mit Erwartungswert 100 und Varianz 25, also $X \sim N(100, 25)$. Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
(i) $P(90 \leq X \leq 110)$ und (ii) $P(X > 107)$.
Nutze dabei die Ergebnisse aus a).

Hausübung

Aufgabe H29 (Regel von der vollständigen Wahrscheinlichkeit, Formel von Bayes)

Die Belegschaft einer Firma setzt sich wie folgt zusammen: 50% Arbeiter, 40% Angestellte und 10% leitende Angestellte. Man geht davon aus, dass während eines Jahres ein Arbeiter (Angestellter bzw. leitender Angestellter) mit Wahrscheinlichkeit p ($p/2$ bzw. $p/4$) die Firma verlässt. Mit Wahrscheinlichkeit 14.5% scheidet ein bestimmtes Belegschaftsmitglied während eines Jahres aus der Firma aus.

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm für die beschriebene Situation.

b) Bestimmen Sie p.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person, welche die Firma verlässt, ein Arbeiter (Angestellter bzw. leitender Angestellter)? Verwenden Sie jeweils Ihr Ergebnis aus b).

Aufgabe H30 (Diskrete Zufallsvariablen, geometrische Verteilung)

Beim Roulette tritt in einem Spiel eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 36$ auf. Ein abergläubiger Spieler beginnt erst mit dem Spiel, nachdem zum ersten Mal eine seiner Unglückszahlen 3, 13, 23 oder 33 aufgetreten ist. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl von Runden, die dieser Spieler warten muss, bevor er mit seinem Spiel beginnen kann.

a) Bestimme die Verteilung von X und berechne die Wahrscheinlichkeit $P(2 \leq X < 5)$.

b) Zeige, dass für eine mit Parameter $p \in]0, 1]$ geometrisch verteilte Zufallsvariable X gilt:

$$\forall k \in \mathbf{N}_0 : P(X > k) = (1 - p)^k.$$

Aufgabe H31 (Erwartungswert und Varianz, diskrete Zufallsvariablen)

Für eine diskrete Zufallsvariable X sei die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion P gegeben:

x	-1	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.05	0.05	0.20	0.25	0.20	0.25

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten $P(0 \leq X < 3)$ und $P(X > 2)$ sowie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Aufgabe H32 (Exponentialverteilung, Binomialverteilung)

In einen Kronleuchter werden gleichzeitig 10 Glühbirnen eines bestimmten Typs eingeschraubt. Die Lebensdauer einer Glühbirne dieses Typs (in Stunden) lasse sich durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit $\lambda = \frac{1}{500} \ln\left(\frac{4}{3}\right)$ angemessen beschreiben. Für die Lebensdauern der einzelnen Glühbirnen wird die Unabhängigkeitsannahme getroffen.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Glühbirne dieses Typs eine Lebensdauer von über 500 Stunden hat.

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 8 der 10 Glühbirnen eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.

c) Bestimme den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl der Glühbirnen, die eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.