Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dr. Dominique Küpper
Dr. Sarah Drewes

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SoSe 2010
23./24./25.06.2010

10. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G29 (Zweidimensionale Messreihen)

In Darmstadt ist eine Erhebung über die Größe und das Gewicht von erwachsenen Fußballspielern durchgeführt worden. Dabei erhielt man folgende Messwerte:

i	1	2	3	4	5	6
Größe (in cm): x_i	177	168	184	162	180	193
Gewicht (in kg): y_i	72	58	79	58	70	83

a) Stelle die Messergebnisse in einem Punktediagramm dar.

b) Berechne die empirischen Streuungen, die empirische Kovarianz und den empirischen Korrelationskoeffizienten dieser zweidimensionalen Messreihe. Ist die Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Größe und Gewicht hier gerechtfertigt? Warum?

c) Wir nehmen nun an, ein linearer Zusammenhang sei begründet. Berechne die Regressionsgerade zur Vorhersage des Gewichts an Hand der Größe eines Fußballspielers und zeichne diese in das Punktediagramm.

d) Bestimme einen Vorhersagewert für das Gewicht eines Fußballspielers bei einer Größe von 175 cm.

e) Ein weiterer erwachsener Fußballspieler ist 154 cm groß und wiegt 84 kg. Betrachte nun die um dieses Wertepaar erweiterte Messreihe. Beurteile anhand geeigneter statistischer Maßzahlen, ob ein linearer Zusammenhang zwischen Größe und Gewicht von Fußballspielern gerechtfertigt ist.

Runde Deine Ergebnisse dabei auf vier Stellen nach dem Komma.

Aufgabe G30 (Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeit)

Sepp, Hinz und Kunz schauen zusammen ein Fussball-WM-Spiel. Für den Fall, dass das Bier nicht reichen sollte, haben sie das folgende Verfahren verabredet um denjenigen zu ermitteln, der Nachschub besorgen muss:

Zunächst werfen Hinz und Kunz eine Münze. Zeigt diese Zahl, scheidet Hinz aus bei Kopf Kunz. Dann werfen Sepp und der Nichtausgeschiedene eine Münze. Ist das Ergebnis Zahl, dann muss Sepp das Bier holen ansonsten der Nichtausgeschiedene.

(a) Wähle eine Bezeichung für die Ergebnisse des im Verfahren durchgeführten Zufallsexperiments und gib die Ergebnismenge an.

(b) Gib dann die Ereignisse

$$A_1 : \text{Sepp muss Bier holen.}$$
$$A_2 : \text{Hinz muss Bier holen.}$$
$$A_3 : \text{Kunz muss Bier holen.}$$

mit Hilfe der in (a) gewählten Bezeichnung an. Welche dieser Ereignisse sind Elementarereignisse?

(c) Berechne die Wahrscheinlichkeiten $P(A_1)$, $P(A_2)$ und $P(A_3)$. Ist das Verfahren gerecht?

Aufgabe G31 (Empirischer Korrelationskoeffizient)

Die Zahlenwerte einer Messreihe hängen oft von der verwendeten Maßeinheit (z. B. cm oder m bei Längen) ab. Zeige, dass der Wert des empirischen Korrelationskoeffizienten nicht davon abhängt. Das heißt: Für zwei Messreihen $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ und $(x_1, z_1), \ldots, (x_n, z_n)$ mit $z_i = \lambda y_i$, $i = 1, \ldots, n$, wobei $\lambda > 0$ eine Konstante ist, gilt:

$$r_{xy} = r_{xz}.$$

Aufgabe G32 (Zufallsexperiment und Wahrscheinlichkeit)

Eine Firma möchte ihren Kunden den Zugriff auf ihre persönlichen Daten über das Internet ermöglichen. Für den Zugang müssen die Kundennummer und eine PIN eingegeben werden. Nachdem die PIN dreimal hintereinander falsch eingegeben wurde, wird der Zugang gesperrt und der Kunde informiert.

(a) Angenommen einem Hacker sei die Kundennummer bekannt und er probiert nun zufällig gewählte PINs aus. (Jede PIN wird mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt.) Wieviele Stellen muss die PIN mindestens haben, damit die Wahrscheinlichkeit, dass der Hackerangriff unbemerkt bleibt, höchstens 10^{-6} ist.

(b) Wieviele Stellen wären nötig, wenn anstelle der PIN ein Passwort verwendet würde? Dabei soll das Passwort aus Buchstaben (ohne Umlaute) und Ziffern bestehen, wobei Groß- und Kleinschreibung nicht beachtet wird.

Hausübung

Aufgabe H29 (Zweidimensionale Messreihen)

Eine Strecke wurde an 15 verschiedenen Tagen und zu unterschiedlichen Tageszeiten mit dem gleichen Fahrzeug abgefahren. Dabei wurde jeweils die Durchschnittsgeschwindigkeit v_i (in km/h) und die Verkehrsdichte d_i (in Anzahl Fahrzeuge pro km) ermittelt. Dies ergab die folgenden Daten:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_i	29	40	42	47	50	56	57	60	60	62	63	67	69	74	82
d_i	40	37	34	30	25	19	23	21	13	16	21	13	16	11	7

(a) Stelle die beobachteten Daten zunächst in einem Punktediagramm graphisch dar und berechne dann den empirischen Korrelationskoeffizienten.

(b) Die Ergebnisse von Teil (a) legen nahe, dass der Zusammenhang zwischen Durchschnittsgeschwindigkeit v und Verkehrsdichte d durch eine Gerade beschrieben werden kann. Bestimme die Regressionsgerade

$$d = \hat{a}v + \hat{b}$$

zur Messreihe (v_i, d_i), $i = 1, \ldots, 15$ und zeichne diese in das Punktediagramm ein.

(c) Da die Durchschnittsgeschwindigkeit leichter zu ermitteln ist als die Verkehrsdichte, sollen mit Hilfe der in Teil (b) berechneten Regressionsgerade Schätzwerte für die Verkehrsdichte bestimmt werden. Gib den Schätzwert für die Verkehrsdichte bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 55 km/h an.

Aufgabe H30 (Standardabweichung)

a) Gegeben sei eine Messreihe $x_1, \ldots, x_n$ mit dem arithmetischen Mittel $\overline{x}$ und der empirischen Varianz s_x^2. Außerdem seien zwei reelle Konstanten $a \neq 0$ und b fest vorgegeben. Zeigen Sie: Bei linearer Transformation der Messreihe gemäß $y_i = a \cdot x_i + b, \ i = 1, \ldots, n$, gilt für das arithmetische Mittel $\overline{y}$ der transformierten Werte $\overline{y} = a \cdot \overline{x} + b$, sowie für die empirische Varianz $s_y^2 = a^2 s_x^2$.

b) In Brighton an der Südküste Englands wurden während der Weihnachtsferien die folgenden Tagestiefsttemperaturen $x_i, \ i = 1, \ldots, 10$, in Grad Fahrenheit gemessen:

31 27 28 26 30 36 35 34 31 30

Berechnen Sie anhand der Informationen $\sum_{i=1}^{10} x_i = 308$ und $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 9588$ die mittlere Tagestiefsttemperatur und die empirische Streuung sowohl in Grad Fahrenheit als auch in Grad Celsius.
(Hinweis: x Grad Fahrenheit entsprechen $y = \frac{5}{9}(x - 32)$ Grad Celsius.)

Aufgabe H31 (Kombinatorik)

Ein Skatspiel besteht aus 32 Karten, vier davon heißen Buben. Nach dem Mischen der Karten erhalten die drei Spieler (Alex, Bodo und Carl) jeweils zehn Karten. Die verbleibenden zwei Karten bilden den sogenannten Skat. Berechne jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Mindestens ein Bube befindet sich im Skat.

B: Carl hat genau einen Buben.

C: Ein Spieler hat genau drei Buben.

D: Jeder Spieler besitzt mindestens einen Buben.