Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dr. Sarah Drewes
Dr. Dominique Küpper

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2010
16./17./18.06.2010

9. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G26 (Konvergenz des QR-Verfahrens)

Gegeben sind die regulären Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 32 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 100 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -150 \end{pmatrix}$$

Überprüfe jeweils, ob die Eigenwerte betragsmäßig getrennt sind indem du die Beträge mit Hilfe von Gershgorin-Kreisen abschätzt, und gib für beide Matrizen eine Abschätzung für den Wert q aus Satz 7.3.2 an. Für welche der beiden Matrizen würde man anhand der Abschätzungen eine schnellere Konvergenz erwarten? Worauf ist dies zurückzuführen?

Aufgabe G27 (Shift-Strategie beim QR-Verfahren)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Eigenwerte von A und gib den Wert von q aus Satz 7.3.2 an.

(b) Betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

und berechne hieraus mit der im Skript beschriebenen Vorgehensweise einen Shift μ.

(c) Berechne die Eigenwerte der Matrix $A - \mu I$ und den Wert von q aus Satz 7.3.2. Ein Eigenwert der Matrix $A - \mu I$ ist durch 1.27 gegeben.

(d) Interpretiere deine Ergebnisse. Was hat der Shift in Bezug auf die Konvergenzgeschwindigkeit bewirkt?

Hinweis: Insbesondere bei Aufgabenteil c) ist es empfehlenswert, die Eigenwerte nicht von Hand, sondern z.B. mit Matlab zu berechnen.
Runde alle (Zwischen-)Ergebnisse in dieser Aufgabe auf zwei Dezimalstellen.

Aufgabe G28 (Verteilungsfunktion, Histogramm)

Auf einem Flughafen wurde an 29 aufeinanderfolgenden Tagen jeweils um 8:00 Uhr die Windgeschwindigkeit gemessen. Es wurden folgende Werte gemessen:

7.4	8.0	12.6	11.5	14.3	14.9	8.6	13.8	20.1	8.6	6.9	9.7	9.2	10.9	13.2
11.5	12.0	18.4	11.5	9.7	9.7	16.6	9.7	12.0	16.6	14.9	8.0	12.0	14.9	

(a) Skizziere die empirische Verteilungsfunktion der angegebenen Messreihe und zeichne ein Histogramm mit folgender Klasseneinteilung:

$$(5.0, 7.0] \quad (7.0, 9.0] \quad (9.0, 11.0] \quad \cdots \quad (19.0, 21.0]$$

(b) Berechne das arithmetische Mittel, den Median und die empirische Varianz.

Hausübung

Aufgabe H27 (Gershgorin und Stabilität)

Die Anfangswertaufgabe

$$y' = Ay, \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^3$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 60 & -120 & 1 \\ 0.1 & 1 & -10000 \end{pmatrix}$$

soll mit dem expliziten Eulerverfahren integriert werden. Wie groß kann die Schrittweite h gewählt werden, wenn bei beliebigem y_0 die Bedingung $lim_{n\to\infty} y_n = 0$ gelten soll? Begründe deine Wahl.

Aufgabe H28 (Verteilungsfunktion, Maßzahlen)

In einer Automobilfabrik wurden bei 20 Fahrzeugen eines Typs folgende Höchstgeschwindigkeiten gemessen:

$$141, 142, 143, 144, 147, 144, 144, 138, 140, 141, 145, 148, 150, 151, 152, 150, 145, 146, 147, 151,$$

(a) Zeichne die empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe.

(b) Berechne den Median, das arithmetische Mittel, das p-Quantil für $p = 0.25$ und $p = 0.75$, die empirische Varianz und die empirische Streuung.

(c) Angenommen bei der Übertragung der Messdaten ist ein Fehler passiert und es wurde bei einer der Messungen statt 145 km/h 345 km/h übertragen. Welche Auswirkung hat das auf die in Aufgabe (b) berechneten Maßzahlen?

Aufgabe H29 (Multiple Choice)

Es darf pro Frage eine Antwort angekreuzt werden. Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz wird ein halber Punkt abgezogen. Für kein Kreuz oder mehr als ein Kreuz pro Frage gibt es null Punkte. Für die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe wird das Maximum aus Null und den erreichten Punkten gebildet.

(a) Das QR-Verfahren mit der Shift-Strategie aus dem Skript angewendet auf eine Matrix A verbessert die Konvergenzgeschwindigkeit für

- ☐ die erste Zeile der Matrix.
- ☐ die vorletzte Zeile der Matrix.
- ☐ die letzte Zeile der Matrix.

(b) Betrachte die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Der betragsmäßig größte Eigenwert soll jeweils durch die Vektoriteration nach von Mises angenähert werden. Für welche Matrix würde man, einen geeigneten Startwert vorausgesetzt, eine schnellere Konvergenz des Rayleigh-Quotienten gegen den Eigenwert erwarten?

- ☐ Für A_1.
- ☐ Für A_2.
- ☐ Die Konvergenzgeschwindigkeit ist für beide Matrizen gleich.