Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dr. Sarah Drewes
Dr. Dominique Küpper

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SoSe 2010
2./3./4.06.2010

7. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G20 (Steife Differenzialgleichungen)

Es soll das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} y(t), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

betrachtet werden. Es handelt sich hierbei um eine steife Differenzialgleichung.

(a) Schreibe für das explizite Euler-Verfahren mit Schrittweite $h = 1$ die Iterationsvorschrift in der Form $u_{j+1} = Au_j$, wobei A eine 2×2-Matrix ist, und führe drei Iterationsschritte aus.

(b) Schreibe für das implizite Euler-Verfahren mit Schrittweite $h = 1$ die Iterationsvorschrift in der Form $u_{j+1} = Bu_j$, wobei B eine 2×2-Matrix ist, und führe drei Iterationsschritte aus.

(c) Vergleiche die Ergebnisse aus Teil (a) und (b). Welches Verfahren beschreibt das qualitative Verhalten der gesuchten Funktion besser?

Aufgabe G21 (Stabilitätsbereich)

Es soll gezeigt werden, daß das klassische Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung (RK4) nicht L-stabil ist. Zeige dazu, dass

(a) das Polynom

$$R(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3 + \frac{1}{24}q^4$$

die Stabilitätsfunktion des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung ist und

(b) die Beziehung

$$|R(q)| < 1 \quad \text{für alle } q \in \mathbf{C} \text{ mit } \Re(q) < 0$$

nicht gilt.

Aufgabe G22 (Butcher-Schema)

Zeige, dass das explizite Runge-Kutta-Verfahren mit dem Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$$

mindestens Konsistenzordnung 3 besitzt.

Hausübung

Aufgabe H21 (Numerische Lösung eines Anfangswertproblems)

Betrachte das Anfangswertproblem

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Gib für folgende Verfahren die Verfahrensgleichungen für u_{j+1} an und verwende die konstante Schrittweite $h = \frac{1}{10}$, um die Näherung u_{10} an $y(1)$ zu bestimmen:

- Verfahren von Heun,
- Klassiches Runge-Kutta-Verfahren (RK4).

Vergleiche Deine Ergebnisse miteinander, mit dem expliziten Eulerverfahren und der exakten Lösung $e = 2.7182818\ldots$.

Aufgabe H22 (Stabilitätsbereich)

Es sei das folgende zweistufige Runge–Kutta–Verfahren zum Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t))$, $t \in [a, b]$, $y(a) = y_0$, gegeben:

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Berechne die Stabilitätsfunktion des zugehörigen impliziten Runge-Kutta-Verfahrens und überprüfe, ob das Verfahren L-stabil ist.

Aufgabe H23 (Butcher-Schema)

Betrachte das Schema

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \gamma_2 & \frac{1}{3} & & \\ \gamma_3 & \frac{1}{3} & \alpha_{32} & \\ \hline & \beta_1 & \beta_2 & \frac{1}{2} \end{array}$$

Bestimme die Parameter $\gamma_2, \gamma_3, \alpha_{32}, \beta_1$ und β_2 so, dass das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren unter den Bedingungen

$$\gamma_i = \sum_j \alpha_{ij} \text{ für } i = 1, 2, 3 \quad \text{und} \quad \gamma_3 = 2\gamma_2$$

höchstmögliche Konsistenzordnung besitzt. Gib das zugehörige Runge-Kutta-Verfahren an.