Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dr. Sarah Drewes
Dr. Dominique Küpper

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2010
19./20./21.05.2010

5. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G14 (Geschlossene Newton-Cotes-Quadratur)

Wir betrachten das Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}\,dx$$

mit dem Wert $\ln(2)$.

(a) (Simpson-Regel)
Berechne eine Näherung für $\ln(2)$ durch eine näherungsweise Berechnung des gegebenen Integrals mit Hilfe der Simpson-Regel (d.h. mit der geschlossenen Newton-Cotes-Formel für $n = 2$) und schätze den Fehler ab.

(b) (3/8-Regel)
Läßt sich die Näherung für $\ln(2)$ verbessern, wenn anstatt der Simpson-Regel die 3/8-Regel (d.h. die geschlossene Newton-Cotes-Formel für $n = 3$) verwendet wird? Vergleiche sowohl die Fehlerabschätzungen als auch die Näherungswerte mit dem 'exakten' Wert von $\ln 2 = 0.69314718055994530942\ldots$.

Aufgabe G15 (Exaktheit der Quadratur)

Prüfe, ob die folgenden Formeln zur Berechnung des Integrals $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ exakt vom Grad 2 sind, also $I(f) = J(f)$ für alle Polynome vom Grad kleinergleich 2.

a) $J(f) = \frac{b-a}{10}(f(a) + 4f(a + \frac{b-a}{3}) + 4f(b - \frac{b-a}{3}) + f(b))$

b) $J(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$

Die zweite Formel entspricht der Simpsonregel. Zeige zudem, dass die Simpsonregel Polynome bis zum Grad 3 exakt integriert, jedoch nicht alle Polynome vom Grad 4.
Hinweis: Wieso ist der Nachweis für die Basiselemente x^k des Polynomraums ausreichend? Es genügt das Integrationsintervall $[-1, 1]$ zu betrachten.

Aufgabe G16 (Summierte Trapezregel)

Berechne für das Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+3}\,dx$$

aus Aufgabe G14 eine Näherung mit Hilfe der summierten Trapezregel und schätze den Fehler ab. Zerlege dafür das Intervall $[-1, 1]$ in zwei gleich große Teilintervalle.

Vergleiche das Ergebnis mit denen aus Aufgabe G14 (a), (b), welche Näherung liefert das bessere Ergebnis und welche die bessere Fehlerschranke?

Hausübung

Aufgabe H15 (Quadratur)

a) Berechne mit der summierten Trapezregel eine Annäherung an das Integral $\int_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$, indem Du das Intervall in zwei gleich große Teilintervalle zerlegst.

b) Bis zu welchem Grad werden Polynome auf dem Intervall $[0, \pi]$ mit der summierten Trapezregel mit zwei gleich großen Teilintervallen auf $[0, \pi]$ exakt integriert? Begründe Deine Antwort.

c) Gib für die summierte Trapezregel eine möglichst minimale Anzahl m von Teilintervallen an, so dass der Quadraturfehler bei der Berechnung von $I(\sin^2(x)) = \int_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$ höchstens 10^{-3} beträgt.

Aufgabe H16 (Rechteckregel)

Eine andere Klasse von Quadraturformeln ergibt sich, wenn man die Knoten frei variieren lässt. Bei einem einzigen Knoten ergibt sich die Formel

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\omega_0 f(x_0).$$

a) Bestimme die Werte für ω_0 und x_0 so, dass die Quadraturformel beliebige Polynome bis zum Grad 1 exakt integriert. Betrachte zuerst den Spezialfall $a = 0,\ b = 1$ und bestimme anschließend die Formel für den Allgemeinfall.

b) Zeige, dass ein Polynom vom Grad 2 existiert welches die in a) erhaltene Rechteckregel nicht exakt integriert.

Aufgabe H17 (Quadraturfehler)

Sei f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Beweise selbst, dass für den Quadraturfehler der Trapezregel folgende Fehlerabschätzung gilt

$$\left| \int_a^b f(x)dx - I_1(f) \right| \leq \tfrac{5}{12} h^3 \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|.$$

Die Formel für den exakten Fehler darf hierbei nicht benutzt werden.
(Die hier zu zeigende Fehlerabschätzung ist um den Faktor fünf schlechter als diejenige aus dem Skript, dafür aber leichter zu beweisen.)
Hinweis: Man kann z.B. eine Taylorentwicklung für die Funktion $g(h) := \int_a^{a+h} f(x)dx$ in $h = 0$ aufstellen.

Aufgabe H18 (`Programmieraufgabe:` Globales Newton-Verfahren)

(a) Implementiere ein Programm, das das globale Newton-Verfahren aus der Vorlesung durchführt, d.h. erweitere deinen Algorithmus aus Aufgabe H14 durch die Schrittweitenwahl nach Armijo. Hierbei soll $\delta = 10^{-3}$ gewählt werden.

(b) Teste dein Programm wiederum an den Funktionen $F1, \dots, F4$ aus Aufgabe H14 und vergleiche die Ergebnisse mit denen, die du durch Anwendung des Programms für das lokale Newton-Verfahren aus Aufgabe H14 erhältst.