Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dr. Dominique Küpper
Dr. Sarah Drewes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SoSe 2010
12./13./14.05.2010

4. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G11 (Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(a) Skizziere den Graphen der Funktion im Intervall $[-10, 10]$.

(b) Bestimme die Iterationsvorschrift zur Berechnung einer Nullstelle von F mit dem Newton-Verfahren.

(c) Zeige, dass das (lokale) Newton-Verfahren für Startwerte mit $|x| > 1$ nicht konvergiert. Was passiert für $|x| = 1$?

(d) Berechne nun für den Startpunkt $x^{(0)} = 2$ eine Nullstelle von F mit dem globalisierten Newton-Verfahren mit der Schrittweitenregel von Armijo. Veranschauliche Dir das Verfahren mit Schrittweitensuche an einer Skizze, d.h. zeichne die Iterierten in Deine Skizze der Funktion ein.

(e) Welchen Wert hat der Index l aus Satz 4.2.2, ii) in diesem Beispiel?

Aufgabe G12 (Newton-Verfahren)

Das Newton-Verfahren soll verwendet werden, um die Schnittpunkte der Ellipse

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{4} = 1$$

mit dem Kreis um den Ursprung mit Radius 3, also $x_1^2 + x_2^2 = 9$, numerisch zu bestimmen.

(a) Gib eine zweidimensionale Funktion $F : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2$ an, deren Nullstellen die Schnittpunkte dieser Ellipse mit dem Kreis sind.

(b) Berechne für den Startpunkt $(x_1, x_2)^{(0)} = (2, 2)$ einen Schritt des lokalen Newton-Verfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion F.

(c) Beurteile die Qualität des berechneten Iterationspunktes $x^{(1)}$ anhand einer Skizze.

(d) Überprüfe, ob der Startpunkt $(0, 0)$ zum Auffinden einer Nullstelle von F mit dem Newton-Verfahren geeignet ist. Begründe Deine Antwort.

Aufgabe G13 (Multiple Choice: Newton-Verfahren)

Bei diesen Multiple Choice Aufgaben darf pro Frage nur eine Antwort angekreuzt werden. Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz wird ein halber Punkt abgezogen. Für kein Kreuz oder mehr als ein Kreuz pro Frage gibt es Null Punkte. Für die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe wird das Maximum aus Null und den erreichten Punkten gebildet.

(a) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und F habe mindestens eine reelle Nullstelle.

- ◯ Dann konvergiert das globalisierte Newton-Verfahren für alle reellen Startwerte.
- ◯ Wenn F' auf $\mathbb{R}$ nichtsingulär ist, dann konvergiert das globalisierte Newton-Verfahren für alle reellen Startwerte.
- ◯ Wenn F' in den Nullstellen von F nichtsingulär ist, dann konvergiert das globalisierte Newton-Verfahren für alle reellen Startwerte.

(b) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und F habe mindestens eine reelle Nullstelle. Das Globalisierte Newton-Verfahren konvergiere von einem Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ mit Schrittweite $\sigma_k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

- ◯ Dann können das globalisierte und das lokale Newton-Verfahren für diesen Startwert unter Umständen gegen unterschiedliche Nullstellen konvergieren.
- ◯ Dann konvergiert das globalisierte Newton-Verfahren für diesen Startwert unter Umständen schneller als das lokale Newton-Verfahren.
- ◯ Dann stimmen das globalisierte und das lokale Newton-Verfahren für diesen Startwert überein.

(c) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und F habe mindestens zwei reelle Nullstellen. Wenn F' in den Nullstellen nichtsingulär ist,

- ◯ dann gibt es zu jeder Nullstelle ein Intervall, so dass das lokale Newton-Verfahren für alle Startwerte aus diesem Intervall mindestens superlinear konvergiert.
- ◯ dann gibt es ein Intervall, das alle Nullstellen enthält, so dass das lokale Newton-Verfahren für alle Startwerte aus diesem Intervall konvergiert.
- ◯ dann kann es beliebig nahe an den Nullstellen Startwerte geben, so dass das lokale Newton-Verfahren nicht konvergiert.

Hausübung

Aufgabe H12 (Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift $f(x) = x^3 - x$.

a) Skizziere den Graphen der Funktion im Intervall $[-2, 2]$.

b) Führe 4 Schritte des Newton–Verfahrens durch, beginnend mit dem Startpunkt $x^{(0)} = 2$. Trage die einzelnen Schritte in die Skizze ein.

c) Ist der Startpunkt $x^{(0)} = 0.51$ geeignet um die Nullstelle $x_N = 0$ mit dem Newton-Verfahren zu finden ?

d) Bestimme ein maximales Intervall um $x_N = 0$, so daß jeder Startpunkt $x^{(0)}$ aus diesem Intervall gegen $x_N = 0$ konvergiert.

e) Welche Startpunkte sind ungeeignet, um mit dem Newton-Verfahren eine Nullstelle zu finden.

Aufgabe H13 (Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion

$$F(x) \quad := \quad \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 - x_2 - \frac{1}{10} \cdot (1 + x_1^4)^{\frac{1}{4}} \\ -x_1 + 4 \cdot x_2 - e^{-x_1^2} \cdot \cos x_2 \end{pmatrix}$$

für $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$

a) Gib das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Iterierten $x^{(k+1)}$, ($k = 0, 1, ...$) an, welches bei der Anwendung des Newton-Verfahrens auf das nichtlineare Gleichungssystem $F(x) = 0$ entsteht.

b) Berechne zum Startvektor $x^{(0)} = (0, 0)^T$ die Näherung $x^{(1)}$.

Aufgabe H14 (Programmieraufgabe: Lokales Newton-Verfahren)

(a) Schreibe ein Programm, welches das lokale Newton-Verfahren aus der Vorlesung implementiert. Das Verfahren terminiere, falls $\|F(x^{(k)})\| \leq tol$ oder $k \geq k_{\text{max}}$. Es sollte folgende Eingabeparameter haben: Die Funktion $F(x)$ und deren Ableitung, den Startpunkt x^0 und die Anzahl von Iterationen k_{max}, die maximal durchgeführt werden sollen, sowie die Toleranz tol.
Ausgegeben werden sollte der letzte Iterationspunkt x^k, die Anzahl der benötigten Iterationen k und der aktuelle Funktionswert $F(x^k)$ bzw. ein Hinweis auf Erfolg oder Misserfolg des Verfahrens.

(b) Teste Dein Verfahren an den folgenden Funktionen:

- $F1(x) = x^3 - x$, für Startpunkte: $x^0 \in \{2, 0.5, -0.5, 0.4\}$.
- $F2(x) = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$, für Startpunkte $x^0 \in \{1, 3, -1\}$.
- $F3(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$, für Startpunkte $x^0 \in \{2, -1, 0, 0.00001, 10\}$.
- $F4(x) = \sin(12 \cdot x)$, für Startpunkte $x^0 \in \{0.1, 0.09, 3.14\}$.

(c) Teste Dein Programm ausserdem für weitere sinnvolle Startwerte Deiner Wahl und versuche das Verhalten Deines Programms für die obigen Funktionen zu erklären.