



3. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G7 (Cholesky-Verfahren)

Bestimme die Choleskyzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Löse unter Verwendung des Ergebnisses das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (0, -1, 4)^T$.

Aufgabe G8 (Matrixnorm & Konditionszahl)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Berechne die Matrixnormen $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$.
- Berechne die Konditionszahl bezüglich der drei Matrixnormen aus Teil (a).

Aufgabe G9 (Störung der rechten Seite)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Berechne die Konditionszahl von A bezüglich der Zeilensummennorm, die von der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm induziert wird.

(b) Die rechte Seite werde nun durch

$$\Delta b = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

gestört. Gib eine Abschätzung für den relativen Fehler der Lösung an.

(c) Löse nun die Gleichungssysteme $Ax = b$ und $A\tilde{x} = b + \Delta b$ und vergleiche mit der Abschätzung aus Teil (b).

Aufgabe G10 (Pivotsuche)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ -100 & 10 & 1 & 1000 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}.$$

Bei welchen dieser Matrizen kann auf die Pivotsuche verzichtet werden?

Hausübung

Aufgabe H8 (Cholesky-Verfahren)

Bestimme die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Löse unter Verwendung des Ergebnisses das Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (2, 3, 2)^T$.

Aufgabe H9 (Störung der Matrix)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \Delta A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbf{R}$.

Betrachte das Gleichungssystem $Ax = b$ und das gestörte Gleichungssystem $(A + \Delta A)\tilde{x} = b$.

- Gib eine obere Schranke für den relativen Fehler in Abhängigkeit von α bezüglich der Spaltensummennorm und der Zeilensummennorm an.
- Für welche α garantieren die Schranken einen relativen Fehler von höchstens $\frac{1}{2}$?

- (c) Berechne den exakten relativen Fehler für die maximalen Werte von α aus Teil (b).

Aufgabe H10 (Kondition und Fehler)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechne die Konditionszahl $\text{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A)$.
(b) Schätze den relativen Fehler der Lösung in der Zeilensummennorm ab, wenn der Gauß-Algorithmus statt mit der Matrix A mit einer Matrix \tilde{A} und statt mit der rechten Seite b mit dem Vektor \tilde{b} gerechnet wird, für die gilt:

$$\|\tilde{A} - A\|_\infty = \|\Delta A\|_\infty \leq 0.02 \quad \text{und} \quad \|\tilde{b} - b\|_\infty = \|\Delta b\|_\infty \leq 0.001.$$

- (c) Berechne die exakte Lösung des Gleichungssystems und des mit folgenden Matrizen gestörten Gleichungssystems

$$\Delta A = \begin{pmatrix} -0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.01 \end{pmatrix}, \quad \Delta b = \begin{pmatrix} -0.001 \\ 0.001 \end{pmatrix}.$$

Vergleiche den Unterschied beider Ergebnisse mit der in (b) gemachten Abschätzung.

Aufgabe H11 (Programmieraufgabe: Cholesky-Zerlegung)

- (a) Implementiere ein Programm, das für eine $n \times n$ -Matrix A die Cholesky-Zerlegung durchführt und die untere Dreiecksmatrix L ausgibt. Das Programm soll an geeigneter Stelle überprüfen, ob die Matrix positiv definit ist und gegebenenfalls eine Fehlermeldung ausgeben.

Teste dein Programm

- i. anhand der Matrix aus Aufgabe G7
- ii. an der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Implementiere nun ein Programm, das ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der Cholesky-Zerlegung von A löst.
Teste dein Programm mit A und b aus Aufgabe G7.