Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dr. Sarah Drewes
Dr. Dominique Küpper

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SoSe 2010
21./22./23.04.2010

1. Übungsblatt zur „Mathematik IV für Elektrotechnik/ Mathematik III für Informatik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lagrangesche Polynominterpolation)

Es seien folgende Daten gegeben:

k	0	1	2	3
x_k	1	2	3	4
y_k	-6	0	2	6

(a) Bestimme das Lagrangesche Interpolationspolynom höchstens 3. Grades, das diese Interpolationsbedingungen erfüllt.

(b) Zeichne das Interpolationspolynom und die Interpolationspunkte.

Aufgabe G2 (Newtonsche Interpolationsformel)

Gegeben sei die Funktion $f : [0, 2] \to [-1, 1] : x \mapsto \cos(\pi x)$ und die Stützstellen $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$.

(a) Berechne das Newtonsche Interpolationspolynom mit Hilfe der dividierten Differenzen.

(b) Gib eine obere Schranke für den Abstand von f und dem Interpolationspolynom an.

(c) Um welchen Faktor verbessert sich die Schranke, wenn die Stützstellen $\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}\}$ hinzugefügt werden?

Aufgabe G3 (Kubische Splines)

Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1, 1] \to [1, 2] : x \mapsto 2^{\cos(\frac{\pi}{2}x)}.$$

Interpoliere die Funktion f durch kubische Splines. Verwende dabei die Zerlegung $\Delta = \{-1, 0, 1\}$ und natürliche Randbedingungen.

Hausübung

Aufgabe H1 (Lagrangesche Polynominterpolation)

Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ soll mit Hilfe des Lagrange-Interpolationspolynoms $p(x)$ zwischen den Stützstellen $x_0 = \frac{1}{4}, x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ interpoliert werden. Vergleiche die Punktauswertungen von f und p in den Punkten $x = \frac{1}{2}$ und $x = 2$. Skizziere die Graphen von f und p.

Aufgabe H2 (Interpolation)

Lese mindestens die *ersten beiden* Aufgabenteile durch bevor Du mit dem Lösen der Aufgabe beginnst.

Die unbekannte Funktion f soll durch Polynome approximiert werden.

(a) Gegeben seien die folgenden drei Stützpunkte:

i	0	1	2
x_i	0	1	2
$f(x_i) = y_i$	-1	1	2

Berechne zu diesen ein Interpolationspolynom.

(b) Als vierter Stützpunkt komme $(x_3, y_3) = (\frac{1}{2}, 0)$ zu den dreien aus Aufgabenteil (a) hinzu. Berechne zu diesen vier Stützpunkten ein Interpolationspolynom.

(c) Die Funktion f sei beliebig oft differenzierbar und über die Ableitungen sei bekannt, daß $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ für alle $x \in [0, 2]$ und alle $n \in \mathbf{N}$ gilt. Gebe für die in Teil (a) und (b) berechneten Interpolationspolynome *jeweils* eine Fehlerabschätzung an.

Aufgabe H3 (Kubische Splines)

Interpoliere die Funktion

$$f : [0, 2] \to [-1, 1] : x \mapsto \sin(\pi x)$$

durch kubische Splines. Verwende dabei die Zerlegung

$$\Delta = \{0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2\}$$

und natürliche Randbedingungen.