Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

05.07.2010

12. Übung Analysis II
Sommersemester 2010

(G12.1) (Satz über die Umkehrabbildung)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(x, y) := (x^3 + xy + 1, x + y + y^3 + 1).$$

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung des Punktes $(1, 1)$ gibt, die durch f bijektiv auf eine Umgebung des Punktes $(3, 4)$ abgebildet wird und berechnen Sie den Wert der Umkehrfunktion von f im Punkt $(3, 4)$, sowie den Wert ihrer Ableitung an dieser Stelle.

(G12.2) (Extrema unter Nebenbedingungen)

Man maximiere das Volumen eines Quaders, welcher einer Kugel von festem Radius R einbeschrieben ist. (Der Quader braucht natürlich a priori kein Würfel zu sein!)

(G12.3) (Satz über die Umkehrabbildung)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Außerdem sei f in U stetig differenzierbar und $Df(x)$ für jedes $x \in U$ invertierbar.

Zeigen Sie, dass jedes $y \in f(U) \setminus f(\partial U)$ höchstens endlich viele Urbilder unter f besitzt.

Hausaufgaben

(H12.4) (Satz über die Umkehrabbildung)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, derart dass die Jacobi-Matrix $Df(a)$ für alle $a \in U$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass $f(U)$ offen in $\mathbb{R}^n$ ist.

(H12.5) (Satz über die Umkehrabbildung)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) := (x_1 + x_2 \cos x_1, x_2\, e^{x_1 x_2}).$$

Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen U und V von $(0, 0)$ geben, so dass gilt: Für alle $z \in V$ hat die Gleichung $f(x) = z$ eine eindeutige Lösung $x = g(z)$ in U. Weiter ist g auf V stetig differenzierbar.

Berechnen Sie auch $Dg(0, 0)$.

(H12.6) (Extrema unter Nebenbedingungen)

Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes über Extrema mit Nebenbedingungen:

Ist $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix, so ist

$$M := \max\{\langle x, Ax\rangle : x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|x\|_2 = 1\}$$

ein Eigenwert von A und jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_0\|_2 = 1$ und $\langle x_0, Ax_0\rangle = M$ ist ein zu M gehörender Eigenvektor.