**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid



# Analysis II

## Übung 11

**Aufgabe 1**

Wir betrachten die Gleichung

$$x^3 + y^2 - 2xy = 0\,.$$

(a) Zeigen Sie, daß man die Gleichung für $(x, y)$ in einer Umgebung von $(1,1)$ eindeutig nach $x$ auflösen kann.

(b) Zeigen Sie, daß die so erhaltene Funktion $x = \varphi(y)$ in $y = 1$ zweimal stetig differenzierbar ist und berechnen Sie $\varphi'(1)$ und $\varphi''(1)$.

(c) Kann man die Gleichung in einer Umgebung von $(1,1)$ eindeutig nach $y$ auflösen?

**Aufgabe 2**

Die Van-der-Waals-Gleichung

$$p = \frac{8\,T}{3\,V - 1} - \frac{3}{V^2}$$

beschreibt den Druck $p > 0$ eines Gases in Abhängigkeit seiner Temperatur $T > 0$ und seines Volumens $V > \frac{1}{3}$.

(a) Zeigen Sie, daß $(V_0, T_0, p_0) = (3, 1, \frac{2}{3})$ eine Lösung der Gleichung ist und daß wir die Gleichung in einer Umgebung dieser Lösung eindeutig nach $V$ auflösen können.

(b) Nach (a) können wir $V$ als Funktion von $T$ und $p$ auffassen. Berechnen Sie die Ableitung $\frac{\partial V}{\partial p}(T_0, p_0)$.

## Hausaufgaben

**Aufgabe 3**

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 + 9z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0\,. \end{aligned}$$

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ die Lösungsmenge.

(a) Zeigen Sie, daß es eine Umgebung $U$ des Punktes $(0, 1/\sqrt{13}, -1/\sqrt{13})$ gibt, in der wir das Gleichungssystem nach $y$ und $z$ auflösen können. D. h. es gibt eindeutige Funktionen $g_1$ und $g_2$, so daß $(x, g_1(x), g_2(x)) \in S$ liegt.

(b) Berechnen Sie $g_1'(0)$ und $g_2'(0)$.

**Aufgabe 4**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$f(x, y) = \sin(x + y) + e^{xy} - 1\,.$$

(a) Zeigen Sie, daß die Gleichung $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung von $(0, 0)$ eindeutig nach $y$ aufgelöst werden kann.

(b) Zeigen Sie, daß die so erhaltene Funktion $y = \varphi(x)$ in einer Umgebung von 0 zweimal stetig differenzierbar ist.

(c) Berechnen Sie eine Taylor-Entwicklung von $\varphi$ um 0 bis zur Ordnung 2.