Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

21.06.2010

10. Übung Analysis II
Sommersemester 2010

(G10.1) (Taylor-Entwicklungen)

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich den Gliedern 2. Ordnung.

(G10.2) (Lokale Extrema)

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y.$$

(G10.3) (Ungleichung für das arithmetische und geometrische Mittel)

Seien $c > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Die Funktion

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot \left(nc - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right)}$$

sei für $x_1 \geq 0, \ldots, x_{n-1} \geq 0$ mit

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i \leq nc$$

definiert.

(i) Zeigen Sie, dass f ein globales Maximum hat und finden Sie es.

(ii) Benutzen Sie (i), um einen Beweis für die folgende Ungleichung für das arithmetische und das geometrische Mittel zu erhalten:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \quad \text{für alle } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+.$$

Hausaufgaben

(H10.4) (Kettenregel)

Es sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ und } y > 0\}$ und $E := \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : w > 0\}$. Wir definieren die Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^3$ und $g : E \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \big(\log(xy),\ \cos(x^2+y),\ e^x\big) \quad \text{und} \quad g(u,v,w) := e^u + vw + \log(w).$$

Zeigen Sie, dass $h := g \circ f$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung

(i) nach der Kettenregel,

(ii) direkt durch Ableiten von $h = h(x,y)$.

(H10.5) (Lokale Extrema)

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2) = x_1^3 - 12x_1 + x_2^2 + 2.$$

(H10.6) (Extrema auf kompakten Mengen)

Sei $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Bestimmen Sie die globalen und lokalen Extrema der Funktion

$$f : K \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 y.$$

Hinweis: Um die globalen Extrema einer Funktion f auf einer kompakten Teilmenge K von $\mathbb{R}^n$ zu bestimmen, untersucht man die lokalen Extrema auf dem Inneren von K und die lokalen Extrema auf dem Rand von K.