Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II

Übung 9

Aufgabe 1

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex (d. h. $x, y \in U$ impliziert $x + t(y - x) \in U$ für alle $t \in [0,1]$). Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar mit

$$\|Df(x)\|_{\mathrm{E}} \leq K \quad \text{für alle } x \in U\,.$$

Zeigen Sie, daß f Lipschitz mit Lipschitz-Konstanten K ist.

Aufgabe 2

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f = (f_1, \dots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ und $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [0,1] \to U$ stetig differenzierbare Funktionen mit $x := \gamma(0)$ und $y := \gamma(1)$. Zeigen Sie, daß

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 Df(\gamma(t))D\gamma(t)\,\mathrm{d}t$$

Aufgabe 3

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, daß die Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \sin(\|f(x)\|_{\mathrm{E}}^2)$$

ebenfalls stetig differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

Hausaufgaben

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y \sin(\frac{y}{x}) & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, daß f in jedem Punkt partiell differenzierbar ist und berechnen Sie die partiellen Ableitungen.

(b) Zeigen Sie, daß $D_1 f$ in keinem Punkt der Form $(0, y)$ mit $y \neq 0$ stetig ist.

Hinweis. Betrachten Sie die Punkte $(x_n, y_n) = (y/(n\pi), y)$.

(c) Ist f differenzierbar in $(0, y)$ mit $y \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 5

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $f : \overline{X \times Y} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $X \times Y$ differenzierbar ist. Sei $\mu : X \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $\mu(x) := \min_{y \in \overline{Y}} f(x, y)$. Angenommen, es gibt eine stetig differenzierbare Funktion $\xi : X \to Y$ mit

$$f(x, \xi(x)) = \mu(x) \quad \text{für alle } x \in X\,.$$

Berechnen Sie das Differential von μ.