Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

07.06.2010

8. Übung Analysis II
Sommersemester 2010

(G8.1) (Höhere Ableitungen und der Satz von Schwarz)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass f stetig partiell differenzierbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber

$$D_1 D_2 f(0,0) \neq D_2 D_1 f(0,0).$$

(Vgl. § 5 Satz 1 aus Forster, *Analysis 2*.)

(G8.2) (Der Laplace-Operator)

Sei $c > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $\omega = \|a\|_2 c$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Man zeige: Die Funktion

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(x,t) = f(\langle a, x\rangle - \omega t),$$

(wobei $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$) ist eine Lösung der Wellengleichung

$$\Delta F - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0.$$

Dabei wirkt der Laplace-Operator auf F als Funktion des Ortes $x \in \mathbb{R}^n$, d. h.

$$\Delta F(x,t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x,t).$$

Hausaufgaben

(H8.3) (Eine nicht rektifizierbare Kurve)

Wir definieren die Kurve $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} (0,0) & \text{falls } t = 0, \\ (t, t^2 \cos(\frac{\pi}{t^2})) & \text{falls } t \neq 0. \end{cases}$$

Man zeige:

(i) Die Kurve γ ist differenzierbar.

(ii) Die Ableitung $\gamma' = (\gamma_1', \gamma_2')$ ist stetig auf $]0,1]$, nicht aber auf ganz $[0,1]$.

(iii) Für die Partition $t_0 = 0 < t_1 = \frac{1}{\sqrt{m}} < t_2 = \frac{1}{\sqrt{m-1}} < \ldots < t_{m-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < t_m = 1$ gilt

$$p_\gamma(t_0, \ldots, t_m) = \sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 > 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m}.$$

(iv) Die Kurve γ ist nicht rektifizierbar.

(H8.4) (Stetigkeit)

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Wir wollen das Verhalten von $f(x,y)$ untersuchen, wenn (x,y) entlang einer Geraden gegen $(0,0)$ konvergiert. Man berechne dazu $\lim_{y\to 0} f(0,y)$ und $\lim_{x \to 0} f(x, ax)$, für $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Ist f im Punkt $(0,0)$ stetig? (Vgl. Tutorium 6 Aufgabe 1.)