Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10.05.2010

4. Übung Analysis II

Sommersemester 2010

(G4.1) (Innenprodukträume, die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und die Parallelogrammgleichung)

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Funktion $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt *Inneres Produkt* falls gilt:

(i) $(\forall x, y, z \in V)\Big(\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle\Big)$,

(ii) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall x, y \in V)\Big(\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle\Big)$,

(iii) $(\forall x, y \in V)\Big(\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle\Big)$,

(iv) $(\forall x \in V)\Big(\langle x, x\rangle \geq 0\Big)$, wobei $\langle x, x\rangle = 0$ genau für $x = 0$ gilt.

(Ein bekanntes Beispiel ist das Standardskalarprodukt $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ in $\mathbb{R}^n$. Siehe auch Kapitel 8 im Lineare Algebra II-Skript.)

Ein *Innenproduktraum* über $\mathbb{R}$ ist ein Paar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, bestehend aus einem Vektorraum V und einem inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V. (Ein Innenproduktraum heißt auch *prähilbertscher Raum.*)

(a) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum über $\mathbb{R}$. Beweisen Sie die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*: Für alle $x, y \in V$ gilt

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}. \tag{1}$$

Hinweis: Man beachte, dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 \leq \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\alpha\langle x, y\rangle + \alpha^2\langle y, y\rangle.$$

Für $y \neq 0$ setze man $\alpha = -\langle x, y\rangle / \langle y, y\rangle$.

(b) Zeigen Sie, dass man in jedem Innenproduktraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ über $\mathbb{R}$ eine Norm über $\mathbb{R}$ (die *kanonische* Norm) durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ definieren kann. Wir sagen, das inneres Produkt *induziert* die Norm $\|\cdot\|$.

Bemerkung: Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung kann man dann in der Form $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ schreiben.

(c) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum über $\mathbb{R}$ und $\|\cdot\|$ die kanonische Norm. Beweisen Sie die *Parallelogrammgleichung*: Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{2}$$

Bemerkung: Für den euklidischen $\mathbb{R}^2$ drückt (2) den elementargeometrischen Satz aus, dass in einem Parallelogramm die Summe der Quadrate über den Seiten gleich der Summe der Quadrate über den Diagonalen ist.

(∗) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{R}$, in dem die Parallelogrammgleichung (2) gilt. Zeigen Sie, dass man durch

$$\langle x, y\rangle := \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 \tag{3}$$

ein inneres Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definieren kann. Zeigen Sie auch, dass $\|\cdot\|$ die kanonische Norm bezüglich des inneres Produkts $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist.

Um die Gleichung $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $x, y \in V$ zu zeigen, zeigen wir zuerst, dass $\langle rx, y\rangle = r\langle x, y\rangle$ für alle $r \in \mathbb{Q}$. Dann folgt $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ aus der Stetigkeit der Funktion $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Da wir aber Stetigkeit in diesem Kontext noch nicht eingeführt haben, können Sie diesen Schritt als gegeben voraussetzen, d. h. es reicht zu zeigen, dass $\langle rx, y\rangle = r\langle x, y\rangle$ für alle $r \in \mathbb{Q}$.

Aus (c) und (∗) folgt also: *Genau diejenigen normierten Räume (über $\mathbb{R}$), in denen die Parallelogrammgleichung gilt, sind Innenprodukträume (über $\mathbb{R}$).*

Hausaufgaben

(H4.2)

Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $C([a,b], \mathbb{R})$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Wir definieren die Funktion $\|\cdot\|_1 : C([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ ein Norm auf $C([a,b], \mathbb{R})$ ist.

(b) Sei $(f_n)_n$ eine Folge von Punkten aus $C([a,b],\mathbb{R})$, d. h. eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$. Die Folge $(f_n)_n$ heißt *Cauchy-Folge* in dem normierten Vektorraum $(C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, wenn gilt:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m,n \geq N)(\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon).$$

Die Folge $(f_n)_n$ heißt *konvergent* in $(C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ mit Grenzwert $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, wenn gilt

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\|f_n - f\|_1 < \varepsilon).$$

Finden Sie eine Cauchy-Folge $(f_n)_n$ in $(C([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, die in $(C([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ nicht konvergiert.

(c) Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Konvergiert die Folge $(f_n)_n$ in $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$?

(H4.3)

(a) Zeigen Sie, dass $(C([0,\pi],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ kein Innenproduktraum ist, d. h. dass $\|\cdot\|_1$ von keinem inneren Produkt induziert wird.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Parallelogrammgleichung in $(C([0,\pi],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ nicht gilt. Benutzen Sie dafür z. B. die Funktionen $f, g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2}, \quad g(t) = \frac{1}{2} - \frac{\cos t}{2}.$$

(b) Sei $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum über $\mathbb{R}$. In (G4.1) haben wir gezeigt, dass für alle $x, y \in V$ gilt

$$|\langle x,y \rangle| \leq \|x\|\,\|y\|, \tag{4}$$

wobei $\|\cdot\|$ die von dem inneren Produkt $\langle \cdot,\cdot \rangle$ induzierte Norm ist. Zeigen Sie, dass

$$|\langle x,y \rangle| = \|x\|\,\|y\|$$

genau dann gilt, wenn $y = 0$ oder $x = \lambda y$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Man setze $\lambda = \langle x,x \rangle / \langle y,x \rangle$, wenn $\langle y,x \rangle \neq 0$ ist.