Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II
Übung 3

Aufgabe 1

Sie $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, welche gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, daß dann auch die Grenzfunktion f Riemann-integrierbarer ist und daß gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 2

Sei $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Berechnen Sie die Taylor-Reihe $T[f,a]$ für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius.

Hausaufgaben

Aufgabe 3

Sei $f_n : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-x/n}.$$

Zeigen Sie, daß $(f_n)_n$ gleichmäßig konvergiert und daß

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n\,\mathrm{d}x \neq \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}x\,.$$

(Dieses Beispiel zeigt, daß §21 Satz 4 nicht für uneigentliche Integrale gilt.)

Aufgabe 4

In dieser Aufgabe zeigen wir, daß wir die Bedingungen von §21 Satz 5 abschwächen können. Anstatt die punktweise Konvergenz der Folge $(f_n)_n$ zu fordern, reicht die Konvergenz der Funktionswerte $(f_n(x_0))_n$ an einem einzigen Punkt x_0.

Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen. Angenommen, die Ableitungen $(f_n')_n$ konvergieren gleichmäßig gegen eine Funktion $f^* : [a,b] \to \mathbb{R}$ und für mindestens einen Punkt $x_0 \in [a,b]$ konvergiert die Folge $(f_n(x_0))_n$. Zeigen Sie, daß die Folge $(f_n)_n$ im gesamten Intervall $[a,b]$ punktweise konvergiert.