Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

26.04.2010

2. Übung Analysis II
Sommersemester 2010

(G2.1) (Die Hadamardsche Formel)

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten c_n. Sei R der Konvergenzradius dieser Reihe. Man zeige

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1}.$$

Dabei vereinbaren wir (in diesem Zusammenhang), dass $0^{-1} = \infty$ und $\infty^{-1} = 0$.

(G2.2) (Die Euler-Mascheronische Konstante)

Sei

$$\gamma_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N.$$

(i) Man zeige $0 < \gamma_N < 1$ für alle $N > 1$.

(ii) Man beweise, dass der Limes

$$\gamma := \lim_{N\to\infty} \gamma_N$$

existiert.

Bemerkung: Die Zahl γ heißt *Euler-Mascheronische Konstante*; es gilt

$$\gamma = 0.57721566\ldots$$

Die Euler-Mascheronische Konstante tritt in der Mathematik häufig und manchmal auch ganz unerwartet in unterschiedlichen Teilgebieten auf. Trotz großer Anstrengungen ist bis heute unbekannt, ob diese Zahl rational oder irrational ist.

Hausaufgaben

(H2.3)

(i) Geben Sie eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, so dass der Grenzwert

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

existiert, das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

aber nicht.

(ii) Untersuche die folgenden Funktionenfolgen bzw. Funktionenreihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n(x) = \sqrt[n]{n^2x^3}, \quad x \in [0,5],\ n \in \mathbb{N}^*;$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}, \quad x \in [0,1];$

(c) $g_n(x) = \sin\dfrac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*.$

(H2.4)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie: Ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent mit Grenzfunktion f und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion, so ist auch die Funktionenfolge $(\phi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent und ihre Grenzfunktion ist $\phi \circ f$.