Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14.07.2010

13. Tutorium Analysis II
Sommersemester 2010

(T13.1) (Lebesgue-Nullmengen)

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Lebesgue-Nullmenge* oder *Menge vom Lebesgue-Maß* 0 in $\mathbb{R}^n$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele abgeschlossene Rechtecke $R_i \subseteq \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, mit

$$M \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} R_i \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=0}^{\infty} |R_i| < \varepsilon$$

gibt. (Offensichtlich dürfen die Rechtecke auch offen gewählt werden, denn zu einem abgeschlossenen Rechteck R und zu $\delta > 0$ gibt es ein abgeschlossenes Rechteck R_δ mit $R^\circ \subseteq R \subseteq R_\delta^\circ$ und $|R_\delta^\circ| := |R_\delta| = (1+\delta)|R|$.)

Zeigen Sie:

(i) Seien $M_j \subseteq \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, Lebesgue-Nullmengen in $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\bigcup_{j=0}^{\infty} M_j$ eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

(ii) Die Menge $\mathbb{Q}^n$ ist eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

(iii) Sei $R \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Rechteck und sei $f : R \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist der Graph
$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in R\}$$
eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+1}$.

(iv) Der Einheitskreis $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ist in $\mathbb{R}^2$ eine Lebesgue-Nullmenge.

(T13.2) (Lebesguesches Integrabilitätskriterium)

Sei $R \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Rechteck und sei $f : R \to \mathbb{R}$ beschränkt. Die Funktion f heißt *fast überall stetig*, falls es eine Menge $M \subseteq R$ gibt, die in $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-Maß 0 hat, so dass f in allen Punkten von $R \setminus M$ stetig ist.

Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist, wenn sie fast überall stetig ist.

(Man kann auch die Umkehrung zeigen: Falls f Riemann-integrierbar ist, ist sie fast überall stetig.)