Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

30.06.2010

11. Tutorium Analysis II
Sommersemester 2010

(T11.1)

Es sei $A :]0,1[\to \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & d(t) \end{pmatrix}.$$

Angenommen, die Matrix $A(t)$ hat für jedes $t \in]0,1[$ zwei verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda_1(t) < \lambda_2(t)$. Zeigen Sie

(i) durch explizite Berechnung der Eigenwerte,

(ii) durch Verwendung des Satzes über implizite Funktionen,

dass die Abbildungen $\lambda_1, \lambda_2 :]0,1[\to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind.

Sie können in (ii) ohne Beweis verwenden, dass λ_1 und λ_2 stetig sind.

(T11.2)

Es sei $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $p_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_a(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Sei weiter $x_0 \in \mathbb{R}$ eine einfache Nullstelle von p_a. Gegeben $b = (b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ definieren wir

$$p_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad p_b(x) := \sum_{k=0}^{n} b_k\, x^k.$$

(i) Zeigen Sie, dass für b in einer hinreichend kleinen Umgebung von a auch das Polynom p_b eine eindeutige einfache Nullstelle $\varphi(b)$ nahe bei x_0 besitzt. Zeigen Sie, dass die so definierte Funktion φ in einer hinreichend kleinen Umgebung von a stetig differenzierbar ist.

(ii) Man zeige: Besitzt p_a genau n verschiedene Nullstellen, so haben auch die Polynome p_b mit b hinreichend nahe bei a genau n verschiedene Nullstellen.