

16.06.2010

9. Tutorium Analysis II Sommersemester 2010

(T9.1)

Beweisen Sie §7 Satz 1 aus Forster, *Analysis 2*:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor derart, dass die Strecke $x + t\xi$, $0 \leq t \leq 1$, ganz in U liegt. Dann ist die Funktion

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) := f(x + t\xi),$$

k -mal stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha f)(x + t\xi) \xi^\alpha.$$

(T9.2)

Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$D_1 f(x, y) = xy \quad \text{und} \quad D_2 f(x, y) = y^2 \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(T9.3)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *positiv homogen* vom Grade $\alpha \in \mathbb{R}$, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und alle $t > 0$ gilt

$$f(tx) = t^\alpha f(x).$$

Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und homogen vom Grade α , so gilt die *Eulersche Relation*

$$\langle \text{grad} f(x), x \rangle = \alpha f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$