Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II

Tutorium 8

Aufgabe 1

Wir betrachten zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie rot f für

$$f(x, y, z) := (x, xy, 1) .$$

(b) Zeigen Sie, daß man rot f formal als Determinante

$$\det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$$

schreiben kann, wobei e_1, e_2, e_3 die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^3$ sind.

(c) Zeigen Sie, daß $\operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$.

(d) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f(x, y, z) = (x^2 y, z, xyz)$$

nicht von der Form $f = \operatorname{rot} g$ für ein $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := 2xy + 1$$

Für $c \in \mathbb{R}$ sei

$$H_c := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c \}$$

die Höhenlinie zur Höhe c.

(a) Berechnen Sie zu jedem Paar $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x_0, y_0) \neq 1$ eine Gleichung für die Tangente von H_c im Punkt (x_0, y_0), wobei $c := f(x_0, y_0)$.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, daß es sich bei H_c um eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ handelt. In Parameterform können wir die Tangente $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ an diese Kurve im Punkt (x_0, y_0) schreiben als

$$\tau(\lambda) := (x_0 + \lambda u, y_0 + \lambda v)$$

für geeignete $u, v \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, daß grad f senkrecht auf dieser Tangente steht, d. h. daß $uD_1 f + vD_2 f = 0$.