



Analysis II

Tutorium 6

Aufgabe 1

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } x \neq 0 \text{ oder } y \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = y = 0. \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, daß für jede feste Zahl $a \in \mathbb{R}$ die Funktionen $x \mapsto f(x, a)$ und $y \mapsto f(a, y)$ stetig sind.
- (b) Zeigen Sie, daß die Funktion f im Punkt 0 unstetig ist.

Aufgabe 2

Sei X ein vollständiger metrischer Raum. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

- (1) X ist kompakt.
- (2) Jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X besitzt eine konvergente Teilfolge $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$.
- (3) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge von Punkten $x_1, \dots, x_n \in X$ mit $X = \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$.