Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

19.05.2010

5. Tutorium Analysis II
Sommersemester 2010

(T5.1) (Strikt normierte Räume)

Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt *strikt normiert* oder *strikt konvex*, falls für alle $x, y \in V$ gilt

$$\left.\begin{array}{l}\|x\| \leq 1\\ \|y\| \leq 1\\ \|x-y\| > 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ strikt normiert ist, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ aber nicht.

(Hier ist $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ und $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ für $x \in \mathbb{R}^n$.)

(T5.2) (Orthogonale Matrizen und Kompaktheit)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *orthogonal*, wenn $M^T = M^{-1}$ gilt, wobei M^T die transponierte Matrix von M bezeichnet.

Zeigen Sie, dass die Menge $O(n)$ der orthogonalen $n\times n$-Matrizen eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$ ist. Hierbei identifizieren wir eine $n \times n$-Matrix $M = (a_{jk})_{j,k=1}^n$ mit dem Vektor

$$(a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

Hinweis: Betrachten Sie für $1 \leq j, k \leq n$ die Abbildung $f_{jk} : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f_{jk}(M) = \sum_{l=1}^n a_{lj} a_{lk}$$

für $M = (a_{jk})_{j,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n^2}$ gegeben ist.