Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II
Tutorium 4

Aufgabe 1

Sei $R(a,b)$ der Raum aller Riemann-integrierbaren Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Für $f, g \in R(a,b)$ setzen wir

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad f \sim_1 g \quad :\text{gdw} \quad \|f-g\|_1 = 0\,.$$

(a) Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|_1$ keine Norm auf $R(a,b)$ ist.

(b) Zeigen Sie, daß $\sim_1$ eine Äquivalenzrelation of $R(a,b)$ ist und daß $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf dem Quotienten $R(a,b)/{\sim_1}$ induziert.

Aufgabe 2

Eine *Frechet-Norm* auf einem Vektorraum V ist eine Funktion $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\|x\| = 0$ gdw $x = 0$

(ii) $\|-x\| = \|x\|$

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Jede Norm ist offensichtlich eine Frechet-Norm.

Eine Metrik auf einem Vektorraum v ist *translations-invariant,* wenn gilt

$$d(x+v, y+v) = d(x,y) \quad \text{für alle } x, y, v \in V\,.$$

(a) Sei $\|\cdot\|$ eine Frechet-Norm auf V. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

eine translations-invariante Metrik auf V ist.

(b) Sei $d(x,y)$ eine translations-invariante Metrik auf V. Zeigen Sie, daß

$$\|x\| := d(0,x)$$

eine Frechet-Norm auf V ist.

(c) Finden Sie eine Frechet-Norm auf $\mathbb{R}$, die keine Norm ist.