Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

05.05.2010

3. Tutorium Analysis II
Sommersemester 2010

(T3.1) (Gleichmäßige Konvergenz und Differenzierbarkeit)

Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_n$ mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

(i) Man zeige, dass $(f_n)_n$ gleichmäßig konvergiert, und man bestimme die Grenzfunktion. Ist die Grenzfunktion differenzierbar?

(ii) Man zeige, dass jedes f_n differenzierbar ist, und man bestimme den punktweisen Grenzwert der Funktionenfolge $(f_n')_n$. Liegt hier gleichmäßige Konvergenz vor?

(T3.2) (Taylor-Reihen)

Bestimmen Sie den Wert $\sqrt{2} = \frac{7}{5}(1 - \frac{1}{50})^{-1/2}$ bis auf einen Fehler, der kleiner oder gleich 10^{-5} ist, durch ein geeignetes Taylor-Polynom.

(T3.3) (Potenzreihen)

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \in]0, \infty[$.

(i) Zeigen Sie, dass dann die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ den Konvergenzradius ∞ hat.

(ii) Wir setzen $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ für $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann für jedes $s \in]0, r[$ eine Konstante $M(s) > 0$ existiert mit

$$|f(z)| \leq M(s) \exp(|z|/s).$$