Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II

Tutorium 2

In diesem Tutorium betrachten wir Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ für ein festes Intervall $I := [a,b]$. Wir nennen eine solche Folge *gleichgeradig stetig*, wenn jedes f_n stetig ist und es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gibt, so daß gilt

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x, y \in I \text{ mit } |x - y| < \delta\,.$$

(Der Unterschied zur gleichmäßigen Stetigkeit ist also, daß das δ nicht von n abhängen darf.)

Wir erinnern daran, daß eine Teilmenge $A \subseteq I$ eines Intervalls I *dicht* ist, wenn jedes offene Intervall (c,d) mit $(c,d) \cap I \neq \varnothing$ mindestens einen Punkt aus A enthält.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, daß eine Folge $(f_n)_n$ von stetigen Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ genau dann gleichmäßig konvergiert, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index N gibt mit

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ und } m, n \geq N\,.$$

Aufgabe 2

Sei $(f_n)_n$ eine gleichgeradig stetige Folge von Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$, $I = [a,b]$. Angenommen es gibt eine dichte Teilmenge $A \subseteq I$, so daß für alle $z \in A$ die Folge $(f_n(z))_n$ der Funktionswerte konvergiert. Zeigen Sie, daß die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 3

Sei $(f_n)_n$ eine gleichgeradig stetige Folge von Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$, $I = [a,b]$. Angenommen es gibt eine Konstante c mit

$$|f_n(x)| \leq c \quad \text{für alle } x \in I \text{ und } n \in \mathbb{N}\,.$$

Zeigen Sie, daß es eine Teilfolge $(f_{k_n})_n$ gibt, welche gleichmäßig konvergent ist.