Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

21.04.2010

1. Tutorium Analysis II
Sommersemester 2010

Approximation durch Faltung: Dirac-Folgen und der Satz von Weierstraß

Wir wollen eine Funktion f durch Funktionen mit bestimmten Eigenschaften approximieren. Dazu führen wir ein allgemeines Verfahren ein, welches sogenannte *Dirac-Folgen* benutzt. Als Anwendung werden wir danach den Satz von Weierstraß beweisen. Dieser Satz besagt, dass jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einen kompakten Intervall $[a, b]$ gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.

Die Darstellung basiert auf den empfehlenswerten Büchern *Analysis* und *Math Talks for Undergraduates* von Serge Lang. Zunächst definieren wir die *Faltung* von zwei Funktionen.

(T1.1)

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, und sei I ein kompaktes Intervall so dass $f(x) = 0$ für alle $x \notin I$ oder $g(x) = 0$ für alle $x \notin I$. Wir definieren die *Faltung* $f * g$ von g mit f als

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Faltung kommutativ ist, d. h.

$$f * g = g * f.$$

(ii) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$(\alpha f) * g = f * (\alpha g) = \alpha(f * g).$$

(iii) Seien $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so dass $f * g_1$, $f * g_2$ und $f * (g_1 + g_2)$ existieren. Zeigen Sie, dass

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2.$$

Bemerkung: Später werden wir auch zeigen können, dass $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Wir betrachten die Faltung as eine Art Produkt, und es stellt sich die Frage, ob es eine Funktion $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $\delta * f = f$ für alle stetigen f gilt, die außerhalb eines kompakten Intervalls gleich Null sind. Wir werden das hier nicht beweisen, aber die Antwort auf diese Frage ist *nein*. Man kann aber etwas finden, was fast so gut wie ein neutrales Element δ ist, nämlich sogenannte *Dirac-Folgen*.

Unter einer *Dirac-Folge* verstehen wir eine Folge $(K_n)_{n\geq 1}$ von stetigen Funktionen $K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die den folgenden Bedingungen genügen:

D1. Es gilt $K_n(x) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und $x \in \mathbb{R}$.

D2. Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt
$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t)\,dt = 1.$$

D3. Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $\delta > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}^*$, so dass für alle $n \geq N$ gilt
$$\int_{|t|\geq\delta} K_n(t)\,dt < \varepsilon,$$
d. h.
$$\int_{-\infty}^{-\delta} K_n(t)\,dt + \int_{\delta}^{\infty} K_n(t)\,dt < \varepsilon.$$

Bedingung D2 bedeutet, dass die Fläche unter der Kurve $y = K_n(x)$ gleich 1 ist. Bedingung D3 bedeutet, dass die Fläche bei Null konzentriert ist, falls n hinreichend groß wird. Die Funktionen K_n haben also höhere Spitzen bei Null, wenn n groß wird, damit die Fläche unter der Kurve den Wert 1 erreicht. In den meisten Anwendungen sind die Funktionen K_n gerade, das heißt $K_n(x) = K_n(-x)$ für alle x, so dass die Graphen symmetrisch zur y-Achse sind. In unsere Anwendungen werden die K_n außerdem außerhalb eines kompaktes Intervalls gleich Null sein.

(T1.2)

Sei $(K_n)_{n\geq 1}$ eine Dirac-Folge, und sei I ein kompaktes Intervall mit $K_n(x) = 0$ für alle $x \notin I$ und $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $(K_n)_{n\geq 1}$ die folgende bemerkenswerte Approximationseigenschaft besitzt:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion, und sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Dann konvergiert die Folge $(K_n * f)_{n\geq 1}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen f, d. h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}^*$ mit

$$\sup_{x\in[a,b]} |(K_n * f)(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Bemerkung: In gewissem Sinne "konvergiert" die Folge $(K_n)_{n\geq 1}$ gegen ein neutrales Element für die Faltungsoperation, obwohl es keine Grenzwertfunktion gibt. Funktionen, mit denen man wie mit den K_n Faltungsintegrale bildet, heißen bisweilen *Kernfunktionen*. Durch Faltung mit diesen Kernfunktionen wird f in Funktionen $K_n * f$ transformiert, die f approximieren und im allgemeinen bessere Eigenschaften als f haben.

(T1.3) (Der Satz von Weierstraß)

Wir wenden (T1.2) in einem speziellen Fall an.

Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann kann f auf $[a, b]$ gleichmäßig durch Polynome approximiert werden, d. h. es gibt eine Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ von Polynome, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}^*$ existiert mit

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass es genügt, den Satz für den Fall $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(1) = 0$ zu beweisen. Danach kann man die *Landau-Kerne* $K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, benutzen, die durch

$$K_n(t) := \begin{cases} \dfrac{(1-t^2)^n}{c_n}, & \text{falls } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{falls } |t| > 1, \end{cases}$$

definiert sind, wobei

$$c_n := \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt.$$

Zeigen Sie, dass $(K_n)_{n\geq 1}$ eine Dirac-Folge ist, und benutzen Sie (T1.2). Zeigen Sie zuletzt, dass die $K_n * f$ auf $[0, 1]$ mit Polynomen übereinstimmen.