

05.07.2010

12. Übung Analysis II Sommersemester 2010

(G12.1) (Satz über die Umkehrabbildung)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(x, y) := (x^3 + xy + 1, x + y + y^3 + 1).$$

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung des Punktes $(1, 1)$ gibt, die durch f bijektiv auf eine Umgebung des Punktes $(3, 4)$ abgebildet wird und berechnen Sie den Wert der Umkehrfunktion von f im Punkt $(3, 4)$, sowie den Wert ihrer Ableitung an dieser Stelle.

Lösung.

Wir wenden den Satz über die Umkehrabbildung mit $a = (1, 1)$ und $b = (3, 4)$ an. Dazu müssen wir zunächst sicherstellen, dass f in einer Umgebung von a stetig differenzierbar ist. Da f in jeder Komponente durch ein Polynom gegeben ist, ist dies der Fall und es gilt

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y & x \\ 1 & 1 + 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Weiter hat die Matrix

$$Df(1, 1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

die Determinante $15 \neq 0$ und ist damit invertierbar. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung existiert also eine Umgebung U von $(1, 1)$ und eine Umgebung V von $(3, 4)$, so dass $\tilde{f} = f|_U : U \rightarrow V$ bijektiv ist. Der Wert der Umkehrfunktion an der Stelle $(3, 4)$ ist natürlich das Urbild unter \tilde{f} , also $\tilde{f}^{-1}(3, 4) = (1, 1)$.

Zur Bestimmung der Ableitung in $(3, 4)$ verwenden wir die Formel aus dem Satz über die Umkehrabbildung und erhalten mit $g := \tilde{f}^{-1}$

$$Dg(3, 4) = (D\tilde{f}(1, 1))^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

(G12.2) (Extrema unter Nebenbedingungen)

Man maximiere das Volumen eines Quaders, welcher einer Kugel von festem Radius R einbeschrieben ist. (Der Quader braucht natürlich a priori kein Würfel zu sein!)

Lösung.

Lösung mittels Lagrange-Multiplikatoren:

Sind x, y, z die Seitenlängen des Quaders, so ist $V(xyz) = xyz$ dessen Volumen. Da der Quader der Kugel vom Radius R einbeschrieben sein soll, hat die Diagonale des Quaders die Länge $2R$; es gilt somit $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$. Definieren wir

$$g : [0, \infty[^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4R^2,$$

so haben wir also die Funktion

$$V : [0, \infty[^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(x, y, z) = xyz$$

unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = 0$ zu maximieren. Da

$$M := \{(x, y, z) \in [0, \infty[^3 : g(x, y, z) = 0\}$$

eine kompakte Teilmenge von \mathbb{R}^3 ist und V stetig, nimmt V ein Minimum sowie ein Maximum auf M an. Offensichtlich gilt $V(x, y, z) = 0$ (genau) dann, wenn $x = 0$, $y = 0$, oder $z = 0$. Maximalstellen von V auf M brauchen wir also nur auf der Menge $]0, \infty[^3 \cap M$ zu suchen. Wir können jetzt §9 Satz 1 aus der Skript mit den Funktionen $\tilde{V} := V|_{]0, \infty[^3}$, $\tilde{g} := g|_{]0, \infty[^3}$ benutzen. Für alle $(x, y, z) \in]0, \infty[^3 \cap M$ gilt

$$\text{grad } \tilde{g}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \neq 0$$

und

$$\text{grad } \tilde{V}(x, y, z) = (yz, xz, xy).$$

Die notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums von \tilde{V} auf $]0, \infty[^3 \cap M$ lautet daher

$$yz - 2\lambda x = 0, \quad xz - 2\lambda y = 0, \quad xy - 2\lambda z = 0, \quad \text{für ein geeignetes } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Da x, y, z von Null verschieden sind, erhalten wir

$$\frac{yz}{x} = \frac{xz}{y} = \frac{xy}{z},$$

also $y^2z = x^2z$, $yz^2 = yx^2$, $xz^2 = xy^2$. Es ist also $x^2 = y^2 = z^2$, somit $x = y = z$, da $x, y, z > 0$. Setzen wir $x = y = z$ in $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$ ein, so erhalten wir als einzigen Kandidaten für eine Maximalstelle von \tilde{V} auf $]0, \infty[^3 \cap M$ den Punkt $x = y = z = 2R\sqrt{3}/3$. Es gilt

$$V\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}, \frac{2R\sqrt{3}}{3}, \frac{2R\sqrt{3}}{3}\right) = \tilde{V}\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}, \frac{2R\sqrt{3}}{3}, \frac{2R\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{9}R^3 > 0,$$

also liegt tatsächlich ein Maximum an der gefundenen Stelle vor. Das maximale Volumen ist also

$$V_{max} = \frac{8\sqrt{3}}{9}R^3,$$

und dieses wird angenommen, wenn der einbeschriebene Quader ein Würfel ist.

Eine schnelle Lösung:

Unter Benutzung der Ungleichung für das arithmetische und geometrische Mittel (siehe (G10.3)) gilt

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2},$$

also

$$\frac{4R^2}{3} \geq \sqrt[3]{(xyz)^2}.$$

Somit ist

$$xyz \leq \sqrt{\left(\frac{4R^2}{3}\right)^3} = \frac{8\sqrt{3}}{9}R^3,$$

wobei Gleichheit vorliegt, wenn

$$x = y = z = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

■

(G12.3) (Satz über die Umkehrabbildung)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Außerdem sei f in U stetig differenzierbar und $Df(x)$ für jedes $x \in U$ invertierbar.

Zeigen Sie, dass jedes $y \in f(U) \setminus f(\partial U)$ höchstens endlich viele Urbilder unter f besitzt.

Lösung.

Wir nehmen an, es gäbe ein $y \in f(U) \setminus f(\partial U)$ mit eine Folge von verschiedenen Urbildern $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in U , d. h. es gilt $f(x_n) = y$ und $x_n \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie $x_n \neq x_m$ für alle $n \neq m$.

Da U beschränkt ist, ist \bar{U} kompakt und somit hat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine in \bar{U} konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Da f in \bar{U} stetig ist, gilt dann

$$f(x) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = y.$$

Damit gilt $x \notin \partial U$, denn sonst wäre $y \in f(\partial U)$. Es gilt also $x \in U$. Dann ist aber f nach dem Satz über die Umkehrabbildung in einer Umgebung von x umkehrbar, d. h. f muss dort insbesondere injektiv sein. Das kann aber nicht sein, denn in jeder Umgebung von x liegt ein Folgenglied $x_{n_k} \neq x$ für das $f(x) = y = f(x_{n_k})$ gilt.

Also ist die Annahme falsch und jedes $y \in f(U) \setminus f(\partial U)$ besitzt höchstens endlich viele Urbilder. ■

Hausaufgaben

(H12.4) (Satz über die Umkehrabbildung)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, derart dass die Jacobi-Matrix $Df(a)$ für alle $a \in U$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass $f(U)$ offen in \mathbb{R}^n ist.

(H12.5) (Satz über die Umkehrabbildung)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) := (x_1 + x_2 \cos x_1, x_2 e^{x_1 x_2}).$$

Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen U und V von $(0, 0)$ geben, so dass gilt: Für alle $z \in V$ hat die Gleichung $f(x) = z$ eine eindeutige Lösung $x = g(z)$ in U . Weiter ist g auf V stetig differenzierbar.

Berechnen Sie auch $Dg(0, 0)$.

(H12.6) (Extrema unter Nebenbedingungen)

Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes über Extrema mit Nebenbedingungen:

Ist $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische $n \times n$ -Matrix, so ist

$$M := \max\{\langle x, Ax \rangle : x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|x\|_2 = 1\}$$

ein Eigenwert von A und jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_0\|_2 = 1$ und $\langle x_0, Ax_0 \rangle = M$ ist ein zu M gehörender Eigenvektor.