Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

05.07.2010

12. Übung Analysis II
Sommersemester 2010

(G12.1) (Satz über die Umkehrabbildung)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(x, y) := (x^3 + xy + 1, x + y + y^3 + 1).$$

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung des Punktes $(1, 1)$ gibt, die durch f bijektiv auf eine Umgebung des Punktes $(3, 4)$ abgebildet wird und berechnen Sie den Wert der Umkehrfunktion von f im Punkt $(3, 4)$, sowie den Wert ihrer Ableitung an dieser Stelle.

Lösung.

Wir wenden den Satz über die Umkehrabbildung mit $a = (1, 1)$ und $b = (3, 4)$ an. Dazu müssen wir zunächst sicherstellen, dass f in einer Umgebung von a stetig differenzierbar ist. Da f in jeder Komponente durch ein Polynom gegeben ist, ist dies der Fall und es gilt

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y & x \\ 1 & 1 + 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Weiter hat die Matrix

$$Df(1, 1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

die Determinante $15 \neq 0$ und ist damit invertierbar. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung existiert also eine Umgebung U von $(1, 1)$ und eine Umgebung V von $(3, 4)$, so dass $\tilde{f} = f|_U : U \to V$ bijektiv ist. Der Wert der Umkehrfunktion an der Stelle $(3, 4)$ ist natürlich das Urbild unter $\tilde{f}$, also $\tilde{f}^{-1}(3, 4) = (1, 1)$.

Zur Bestimmung der Ableitung in $(3, 4)$ verwenden wir die Formel aus dem Satz über die Umkehrabbildung und erhalten mit $g := \tilde{f}^{-1}$

$$Dg(3, 4) = (D\tilde{f}(1, 1))^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

■

(G12.2) (Extrema unter Nebenbedingungen)

Man maximiere das Volumen eines Quaders, welcher einer Kugel von festem Radius R einbeschrieben ist. (Der Quader braucht natürlich a priori kein Würfel zu sein!)

Lösung.

Lösung mittels Lagrange-Multiplikatoren:

Sind x, y, z die Seitenlängen des Quaders, so ist $V(xyz) = xyz$ dessen Volumen. Da der Quader der Kugel vom Radius R einbeschrieben sein soll, hat die Diagonale des Quaders die Länge $2R$; es gilt somit $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$. Definieren wir

$$g : [0, \infty[^3 \to \mathbb{R}, \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4R^2,$$

so haben wir also die Funktion

$$V : [0, \infty[^3 \to \mathbb{R}, \quad V(x, y, z) = xyz$$

unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = 0$ zu maximieren. Da

$$M := \{(x, y, z) \in [0\infty[^3 : g(x, y, z) = 0\}$$

eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ ist und V stetig, nimmt V ein Minimum sowie ein Maximum auf M an. Offensichtlich gilt $V(x, y, z) = 0$ (genau) dann, wenn $x = 0$, $y = 0$, oder $z = 0$. Maximalstellen von V auf M brauchen wir also nur auf der Menge $]0, \infty[^3 \cap M$ zu suchen. Wir können jetzt §9 Satz 1 aus der Skript mit den Funktionen $\tilde{V} := V|_{]0,\infty[^3}$, $\tilde{g} := g|_{]0,\infty[^3}$ benutzen. Für alle $(x, y, z) \in]0, \infty[^3 \cap M$ gilt

$$\operatorname{grad} \tilde{g}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \neq 0$$

und

$$\operatorname{grad} \tilde{V}(x, y, z) = (yz, xz, xy).$$

Die notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums von $\tilde{V}$ auf $]0, \infty[^3 \cap M$ lautet daher

$$yz - 2\lambda x = 0, \quad xz - 2\lambda y = 0, \quad xy - 2\lambda z = 0, \qquad \text{für ein geeignetes } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Da x, y, z von Null verschieden sind, erhalten wir

$$\frac{yz}{x} = \frac{xz}{y} = \frac{xy}{z},$$

also $y^2 z = x^2 z$, $yz^2 = yx^2$, $xz^2 = xy^2$. Es ist also $x^2 = y^2 = z^2$, somit $x = y = z$, da $x, y, z > 0$. Setzen wir $x = y = z$ in $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$ ein, so erhalten wir als einzigen Kandidaten für eine Maximalstelle von $\tilde{V}$ auf $]0, \infty[^3 \cap M$ den Punkt $x = y = z = 2R\sqrt{3}/3$. Es gilt

$$V\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}, \frac{2R\sqrt{3}}{3}, \frac{2R\sqrt{3}}{3}\right) = \tilde{V}\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}, \frac{2R\sqrt{3}}{3}, \frac{2R\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{9}R^3 > 0,$$

also liegt tatsächlich ein Maximum an der gefundenen Stelle vor. Das maximale Volumen ist also

$$V_{max} = \frac{8\sqrt{3}}{9}R^3,$$

und dieses wird angenommen, wenn der einbeschriebene Quader ein Würfel ist.

Eine schnelle Lösung:

Unter Benutzung der Ungleichung für das arithmetische und geometrische Mittel (siehe (G10.3)) gilt

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2},$$

also

$$\frac{4R^2}{3} \geq \sqrt[3]{(xyz)^2}.$$

Somit ist

$$xyz \leq \sqrt{\left(\frac{4R^2}{3}\right)^3} = \frac{8\sqrt{3}}{9}R^3,$$

wobei Gleichheit vorliegt, wenn

$$x = y = z = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

■

(G12.3) (Satz über die Umkehrabbildung)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Außerdem sei f in U stetig differenzierbar und $Df(x)$ für jedes $x \in U$ invertierbar.

Zeigen Sie, dass jedes $y \in f(U) \setminus f(\partial U)$ höchstens endlich viele Urbilder unter f besitzt.

Lösung.

Wir nehmen an, es gäbe ein $y \in f(U) \setminus f(\partial U)$ mit eine Folge von verschiedenen Urbildern $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U, d. h. es gilt $f(x_n) = y$ und $x_n \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie $x_n \neq x_m$ für alle $n \neq m$.

Da U beschränkt ist, ist $\overline{U}$ kompakt und somit hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine in $\overline{U}$ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Da f in $\overline{U}$ stetig ist, gilt dann

$$f(x) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = y.$$

Damit gilt $x \notin \partial U$, denn sonst wäre $y \in f(\partial U)$. Es gilt also $x \in U$. Dann ist aber f nach dem Satz über die Umkehrabbildung in einer Umgebung von x umkehrbar, d. h. f muss dort insbesondere injektiv sein. Das kann aber nicht sein, denn in jeder Umgebung von x liegt ein Folgenglied $x_{n_k} \neq x$ für das $f(x) = y = f(x_{n_k})$ gilt.

Also ist die Annahme falsch und jedes $y \in f(U) \setminus f(\partial U)$ besitzt höchstens endlich viele Urbilder.

■

Hausaufgaben

(H12.4) (Satz über die Umkehrabbildung)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, derart dass die Jacobi-Matrix $Df(a)$ für alle $a \in U$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass $f(U)$ offen in $\mathbb{R}^n$ ist.

Lösung.

Nach dem Umkehrsatz existiert zu jedem $a \in U$ eine offene Umgebung $U_a \subseteq U$ von a, so dass $f(U_a) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist. Wegen

$$f(U) = \bigcup_{a\in U} f(U_a)$$

und da beliebige Vereinigungen offener Mengen wiederum offen sind, ist auch $f(U)$ offen.

■

(H12.5) (Satz über die Umkehrabbildung)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) := (x_1 + x_2 \cos x_1, x_2\, e^{x_1 x_2}).$$

Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen U und V von $(0, 0)$ geben, so dass gilt: Für alle $z \in V$ hat die Gleichung $f(x) = z$ eine eindeutige Lösung $x = g(z)$ in U. Weiter ist g auf V stetig differenzierbar.

Berechnen Sie auch $Dg(0, 0)$.

Lösung.

Es ist $f(0, 0) = (0, 0)$ und

$$Df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 - x_2 \sin x_1 & \cos x_1 \\ x_2^2\, e^{x_1 x_2} & e^{x_1 x_2} + x_1 x_2\, e^{x_1 x_2} \end{pmatrix},$$

insbesondere also $Df(0, 0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit $\det Df(0, 0) = 1 \neq 0$. Da alle partielle Ableitungen stetig sind, ist f stetig differenzierbar.

Nach dem Satz über die Umkehrabbildung gibt es somit offene Umgebungen U und V von $(0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$, und eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung $g : V \to U$ mit $f(g(z)) = z$ für alle $z \in V$ und $g(f(x)) = x$ für alle $x \in U$. Das heißt, $f|_U : U \to V$ ist bijektiv mit

Umkehrfunktion $g = (f|_U)^{-1} : V \to U$. Also ist für $z \in V$ tatsächlich $x = g(z) \in U$ das einzige Element in U mit $f(x) = z$. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung ist weiter

$$Dg(0,0) = (Df(0,0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

(H12.6) (Extrema unter Nebenbedingungen)

Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes über Extrema mit Nebenbedingungen:

Ist $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix, so ist

$$M := \max\{\langle x, Ax\rangle : x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|x\|_2 = 1\}$$

ein Eigenwert von A und jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x_0\|_2 = 1$ und $\langle x_0, Ax_0\rangle = M$ ist ein zu M gehörender Eigenvektor.

Lösung.

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$F(x) = \langle x, Ax\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

und $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ die $(n-1)$-Sphäre. Da S^{n-1} kompakt und F stetig auf S^{n-1} ist, nimmt F sein Maximum auf S^{n-1} an. Wir untersuchen die Maximalstellen mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange. Hierzu beobachten wir, dass für $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \langle x, x\rangle - 1 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$$

gilt

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}.$$

Wir müssen daher F unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ maximieren. Da $D_k g(x) = 2x_k$, gilt

$$\operatorname{grad} g(x) = 2x \neq 0 \qquad \text{für alle } x \in S^{n-1}.$$

Weiter berechnet man

$$\begin{aligned} D_k F(x) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + \sum_{i,j} a_{ij} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i = 2 \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i, \end{aligned}$$

da $a_{ki} = a_{ik}$. Das bedeutet

$$\operatorname{grad} F(x) = 2Ax.$$

Daher lautet die notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums von F auf S^{n-1} im Punkt $x_0 \in S^{n-1}$

$$Ax_0 = \lambda x_0 \qquad \text{für ein geeignetes } \lambda \in \mathbb{R},$$

d.h. x_0 ist ein Eigenvektor von A und der Lagrangesche Multiplikator λ ist der zugehörige Eigenwert. Sei $x_0 \in S^{n-1}$ ein Punkt, in dem die stetige Funktion F auf der kompakten Menge S^{n-1} sein Maximum M annimmt. Dieses x_0 muss nach dem gerade Gesagten ein Eigenvektor von A sein. Da

$$M = F(x_0) = \langle x_0, Ax_0\rangle = \langle x_0, \lambda x_0\rangle = \lambda,$$

ist der Funktionswert M an dieser Stelle gleich dem Eigenwert λ von x_0.

■