Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
PD Dr. Achim Blumensath
Dr. Eyvind Briseid

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2010

Analysis II
Übung 11

Aufgabe 1

Wir betrachten die Gleichung

$$x^3 + y^2 - 2xy = 0\,.$$

(a) Zeigen Sie, daß man die Gleichung für (x, y) in einer Umgebung von $(1,1)$ eindeutig nach x auflösen kann.

(b) Zeigen Sie, daß die so erhaltene Funktion $x = \varphi(y)$ in $y = 1$ zweimal stetig differenzierbar ist und berechnen Sie $\varphi'(1)$ und $\varphi''(1)$.

(c) Kann man die Gleichung in einer Umgebung von $(1,1)$ eindeutig nach y auflösen?

Lösung. (a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy$ ist stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 2x, \quad f(1,1) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1 \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es eine Umgebung U von $y = 1$ und eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(1) = 1$ und $f(\varphi(y), y) = 0$.

(b) Für y nahe bei 1 ergibt sich die Ableitung zu

$$\varphi'(y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(y), y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(y), y)} = -\frac{2y - 2\varphi(y)}{3\varphi(y)^2 - 2y}\,. \tag{1}$$

Insbesondere ist $\varphi'(1) = -\frac{2-2}{3-2} = 0$.

Die Formel für $\varphi'(y)$ drückt die Ableitung in Abhänigkeit von y und $\varphi(y)$ aus. Da $\varphi(y)$ stetig differenzierbar ist, ist somit auch $\varphi'(y)$ stetig differenzierbar. Also ist $\varphi(y)$ zweimal stetig differenzierbar. Die zweite Ableitung ist

$$\varphi''(y) = -\frac{2 - 2\varphi'(y)}{3\varphi(y)^2 - 2\,y} + \frac{2y - 2\varphi(y)}{(3\varphi(y)^2 - 2y)^2}(6\varphi(y)\varphi'(y) - 2)\,.$$

Insbesondere ist $\varphi''(1) = -2$.

(c) Wegen $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0$ können wir den Satz über implizite Funktionen nicht für die Auflösbarkeit nach y benutzen. Wir schreiben die Gleichung $x^3 + y^2 - 2xy = 0$ um zu

$$(y - x)^2 = x^2(1 - x)\,.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist nie negativ, aber die rechte Seite wird negativ für $x > 1$. Deswegen gibt es für $x > 1$ keine Lösung. Für $x = 1$ erhalten wir $(y - x)^2 = 0$, d. h. $y = x = 1$. Für $x < 1$ können wir die Gleichung manuell nach y umformen und erhalten zwei Lösungen

$$y = x \pm x\sqrt{1 - x}\,.$$

Aufgabe 2

Die Van-der-Waals-Gleichung

$$p = \frac{8\,T}{3\,V-1} - \frac{3}{V^2}$$

beschreibt den Druck $p > 0$ eines Gases in Abhängigkeit seiner Temperatur $T > 0$ und seines Volumens $V > \frac{1}{3}$.

(a) Zeigen Sie, daß $(V_0, T_0, p_0) = (3, 1, \frac{2}{3})$ eine Lösung der Gleichung ist und daß wir die Gleichung in einer Umgebung dieser Lösung eindeutig nach V auflösen können.

(b) Nach (a) können wir V als Funktion von T und p auffassen. Berechnen Sie die Ableitung $\frac{\partial V}{\partial p}(T_0, p_0)$.

Lösung. (a) Die Funktion

$$f(V,T,p) := \frac{8\,T}{3\,V-1} - \frac{3}{V^2} - p$$

ist stetig differenzierbar. Es ist $f(V_0, T_0, p_0) = 0$ und

$$\frac{\partial f}{\partial V} = -\frac{24T}{(3V-1)^2} + \frac{6}{V^3}\,.$$

Also

$$\frac{\partial f}{\partial V}(3, 1, \tfrac{2}{3}) = -\frac{24}{64} + \frac{6}{27} = -\frac{11}{72} \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen läst sich die Van-der-Waals-Gleichung also in einer Umgebung von (V_0, T_0, p_0) nach V auflösen.

(b) Wegen $\frac{\partial f}{\partial p}(V,T,p) = -1$ gilt nach dem Satz über implizite Funktionen

$$\frac{\partial V}{\partial p}(T,p) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial p}(V(T,p),T,p)}{\frac{\partial f}{\partial V}(V(T,p),T,p)} = \frac{1}{-\frac{24T}{(3V(T,p)-1)^2} + \frac{6}{V(T,p)^3}}\,.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial V}{\partial p}(T_0, p_0) = -\frac{72}{11}\,.$$

Hausaufgaben

Aufgabe 3

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 + 9z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0\,. \end{aligned}$$

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ die Lösungsmenge.

(a) Zeigen Sie, daß es eine Umgebung U des Punktes $(0, 1/\sqrt{13}, -1/\sqrt{13})$ gibt, in der wir das Gleichungssystem nach y und z auflösen können. D. h. es gibt eindeutige Funktionen g_1 und g_2, so daß $(x, g_1(x), g_2(x)) \in S$ liegt.

(b) Berechnen Sie $g_1'(0)$ und $g_2'(0)$.

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$f(x, y) = \sin(x + y) + e^{xy} - 1 .$$

(a) Zeigen Sie, daß die Gleichung $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung von $(0, 0)$ eindeutig nach y aufgelöst werden kann.

(b) Zeigen Sie, daß die so erhaltene Funktion $y = \varphi(x)$ in einer Umgebung von 0 zweimal stetig differenzierbar ist.

(c) Berechnen Sie eine Taylor-Entwicklung von φ um 0 bis zur Ordnung 2.